KATARZYNA JAKOWSKA-SUWALSKA

**PROGRAMOWANIE MATEMATYCZNE**

**Katowice 2014**

**2. Zagadnienia programowania matematycznego**

W procesie podejmowania decyzji mamy najczęściej do czynienia z optymalizacją warunkową. Oznacza to, że poszukujemy największej lub najmniejszej wartości funkcji kryterium   
f: D →R, w przypadku gdy zbiór działań dopuszczalnych D jest podzbiorem przestrzeni Rn .

Zagadnienie poszukiwania decyzji najlepszej można zapisać:

**Znaleźć takie działanie dopuszczalne x\*∈ D, że**

**f(x\*) = max **

**lub**

**f(x\*) = min **

**w zależności od problemu decyzyjnego.**

Niech funkcje f,g1,g2,...,gm będą funkcjami rzeczywistymi określonymi na przestrzeni Rn . Ponieważ zbiór D ⊂ Rn, najczęściej jest określony za pomocą zbioru pewnych warunków ograniczających można go zapisać w postaci

* 1. D = x∈Rn : gi(x) ≥ 0 , i = 1,2,...,k; gj(x) = 0, j = k+1,...m

znaleźć takie x\*∈Rn, że

f(x\*) = max {f(x) : x∈Rn } (min {f(x) : x∈Rn })

(2.2) przy spełnieniu następujących warunków ograniczających:

gi (x\*) ≥ 0 , i = 1, 2, ..., k

gj (x\*) = 0 , j = k+1, ..., m

Zagadnienie poszukiwania decyzji najlepszej (decyzji optymalnej) możemy zapisać:

Zagadnienie (2.2) z minimalizacją funkcji f można zawsze sprowadzić do zagadnienia z maksymalizacją funkcji f poprzez przemnożenie funkcji f przez -1. W skrócie zagadnienie (2.2) zapisywać będziemy w postaci:

f(x) → max

gi (x) ≥ 0 , i = 1, ..., k

(2.3) gj (x) = 0 , j =k+1, ..,m

x∈Rn

Zagadnienie w postaci (2.3) nazywać będziemy zagadnieniem programowania matematycznego.

Funkcję f nazywać będziemy funkcją celu.

Każdy punkt x∈Rn,który spełnia warunki ograniczające:

(2.4) 

nazywać będziemy rozwiązaniem dopuszczalnym, natomiast zbiór D zdefiniowany w (2.1) - zbiorem rozwiązań dopuszczalnych.

Rozwiązanie dopuszczalne x\* ∈ D, dla którego

f(x\*) = max {f(x): x∈D }

nazywać będziemy rozwiązaniem optymalnym.

Jeżeli f, gi, i = 1,2 ,...,m. są funkcjami liniowymi wtedy zagadnienie (2.3) nazywać będziemy zagadnieniem programowania liniowego (w skrócie zagadnieniem liniowym).

Jeśli któraś z funkcji f, gi, i=1,2 ...,m, jest nieliniowa, wtedy zagadnienie (2.3) nazywać będziemy zagadnieniem programowania nieliniowego (w skrócie zagadnieniem nieliniowym).

Dla każdego problemu w postaci (2.3) można utworzyć funkcję L(x,) (zwaną funkcją Lagrange'a ) w postaci

(2.5) L(x,) = f(x) + igi(x) gdzie x Rn ,  = (1, 2,..., m) ,Rm.

Liczby iR nazywać będziemy mnożnikami Lagrange'a.

Mówimy, że w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych D zdefiniowanym za pomocą warunków (2.4) spełniony jest warunek Slatera jeśli istnieje taki punkt z ****D, że dla każdej nieliniowej funkcji gi, ( i = 1, 2,...,k) zachodzi nierówność:

gi(z) > 0.

Oznaczmy symbolem x L(x\*,) gradient funkcji L w punkcie (x\*,) (wektor pochodnych cząstkowych funkcji Lagrange'a L(x,) gdzie x = (x1, x2,..., xn),  = (1, 2,..., m)).

Zbiór D nazywamy **wypukłym** gdy wraz dowolnymi dwoma jego punktami zawiera [odcinek](http://pl.wikipedia.org/wiki/Odcinek) je łączący.

Funkcję rzeczywistą f określoną na [zbiorze wypukłym](http://pl.wikipedia.org/wiki/Zbi%C3%B3r_wypuk%C5%82y) D nazywamy **wypukłą**, jeżeli



Prawdziwe jest następujące:

**Twierdzenie 2.1. Kuhna - Tuckera. Niech funkcje f, g1, g2,..., gm będą różniczkowalne w Rn, natomiast zbiór rozwiązań dopuszczalnych D będzie zbiorem wypukłym, w którym spełniony jest warunek Slatera . Jeśli x\*D jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia (2.3) to istnieją takie mnożniki Lagrange'a 1, 2,..., m, że**

**(2.6) i , i=1,2,...,k,**

**(2.7) igi(x\*) = 0 , i=1,2,...,m,**

**(2.8) x L(x\*,) = 0.**

Warunki (2.6),(2.7),(2.8) nazywane są warunkami Kuhna - Tuckera.

**Twierdzenie 2.2. Niech funkcje f, g1, g2,..., gm  są różniczkowalne i wklęsłe w Rn natomiast zbiór rozwiązań dopuszczalnych D będzie zbiorem wypukłym, w którym spełniony jest warunek Slatera .**

**Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to aby x\*D było rozwiązaniem optymalnym problemu (2.3) jest istnienie takich 1, 2,..., m, że spełnione są warunki Kuhna - Tuckera (2.6), (2.7), (2.8).**

### Uwaga. Funkcja liniowa jest jednocześnie wklęsła i wypukła.

Przykład 2.1. Rozważmy zagadnienie

4x1 + 4x2max

2 - x12 - x22  0,

x10,

x20.

Mamy zatem dla x=(x1, x2)

f(x) = 4x1 + 4x2 ,

g1(x) = 2 - x12 - x22,

g2(x) = x1,

g3(x) = x2.

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych D przedstawiono na rys.2 1.

Rys.2.1

Funkcje f, g2, g3  są liniowe, a więc różniczkowalne i wklęsłe. Funkcja g1  jest także różniczkowalna i wklęsła. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych D={xR2 : gi(x)0, i=1, 2, 3} jest zbiorem wypukłym.

x1

x2

**D**





Jedyną funkcją nieliniową jest g1 .

W punkcie xa = [0,5 ; 0,5] D zachodzi nierówność:

g1(xa) = 1,5 > 0.

Spełniony jest zatem w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych D warunek Slatera . Spełnione są więc wszystkie założenia twierdzenia 2.2. Dla znalezienia rozwiązania optymalnego wystarczy znaleźć mnożniki Lagrange'a  , które spełniają warunki Kuhna - Tuckera dla xD.

Warunek (2.6) ma postać .

Warunek (2.7) ma postać g1(x) = (2- x12 - x22) = 0,

g2(x) = x1 = 0,

g3(x) = x2 = 0.

Warunek (2.8) ma postać 4 - 2x1 +  = 0,

4 - 2x2  +  = 0.

Jedynym rozwiązaniem układu równań

(2- x12 - x22) = 0,

x1 = 0,

x2 = 0.

4 - 2x1 +  = 0

4 - 2x2  +  = 0

dla mnożników Lagrange'a  ( = 2,  = 0,  = 0) jest x1 = 1, x2 = 1.

Ponieważ punkt [1,1]D, zatem jest to rozwiązanie optymalne zagadnienia.

**Uwaga**. Jeśli funkcje ograniczeń gi ( i = 1, 2, ...,m) są funkcjami liniowymi wtedy zbiór rozwiązań dopuszczalnych D jest zbiorem wielościennym wypukłym zwanym simpleksem.

.

**Twierdzenie 2.3. Niech funkcja celu f będzie funkcją wypukłą natomiast zbiór rozwiązań dopuszczalnych będzie domkniętym zbiorem wielościennym wypukłym. Jeśli zagadnienie programowania matematycznego (2.3) ma rozwiązanie optymalne to rozwiązanie to znajduje się w wierzchołku zbioru D.**

**Twierdzenie 2.4. Funkcja ciągła na zbiorze domkniętym i ograniczonym D osiąga w tym zbiorze swoje ekstrema (maksimum i minimum).**

**Zadania**

**Zadanie 2.1.** Narysować określone poniżej zbiory rozwiązań dopuszczalnych. Sprawdzić, który z nich jest wypukły i który z nich spełnia warunek Slatera.

D1 = {(x1,x2)R2 : x1+ x2 = 6, x1- x23},

D2 = {(x1,x2)R2 : x12+ x2 2 = 16},

D3 = {(x1,x2)R2 : x12+ x2 2  16, x12+ x2 2 9},

D4 = {(x1,x2)R2 : x12+ x2 2  16, x1- x2 3}.

**Zadanie 2.2**. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji f(x) = x3 + 2 x2 + 3x +5.

**Zadanie 2.3**. Znaleźć maksimum funkcji f(x) = 2 x2 + 3x +5 w przedziale [0 ; 5].

**Zadanie 2.4**. Znaleźć minimum funkcji f(x) = 2 x2 + 3x +5 w przedziale [0 ; 5].

**Zadanie 2.5**. Znaleźć minimum funkcji f(x) = 2 x2 - 3x +5 w przedziale [0 ; 5].

**Zadanie 2.5**. Znaleźć minimum funkcji f(x1,x2) = (x1-1)2 + (x2 -2)2

przy warunkach : 9 x1+ 3x2  27,

x1 0, x2 0.

**Zadanie 2.6**. Sprawdzić czy punkt x = (1 ; 2) jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia

a) f(x1,x2)= 2x12 + 2x2 2 - 2x2 -5 x1  min

przy warunkach : 9 x1+ 3x2  27,

x1 0, x2 0.

1. f(x1,x2) = (x1-1)2 + (x2 -3)2  min

przy warunkach : x1+ x2  6,

x1 0, x2 0.

c) f(x1,x2) = -2x12 - 3x2 2 + 9 x1+ 3x2  max

przy warunkach : 2x1 + 3x2  6,

2x1 + x2 = 4,

x1 0, x2 0.

**Zadanie 2.7**. Znaleźć rozwiązanie optymalne zagadnienia

2x1 + 3x2  max

2x1 + x2  4,

x1 0, x2 0.

**Zadanie 2.8.** Znaleźć rozwiązanie optymalne zagadnienia

2x1 - 3x2  min

x1 + x2  6,

x1 0, x2 0.

**Zadanie 2.9.** Znaleźć rozwiązanie optymalne zagadnienia

-x12 - 3x2 2 + x1+ 3x2  max

przy warunkach : 2x1 + 3x2  6,

x1 + 2x2  4,

x1 0, x2 0.

**Zadanie 2.10.** Znaleźć rozwiązanie optymalne zagadnienia

-x12 - 2x2 2 -10 x1+ 3x2  max

przy warunkach : 2x1 + x2  4,

x1 + x2  6,

x1 0, x2 0.

**Zadanie 2.11.** Znaleźć rozwiązanie optymalne zagadnienia

x12 + 2x2 2 -4 x1+ 3x2  max

przy warunkach : 2x1 + x2  4,

3x1 + x2  6,

x1 0, x2 0.

**Zadanie 2.12.** Znaleźć rozwiązanie optymalne zagadnienia

6 x12 + x2 2 +4 x1- 3x2  max

przy warunkach : x1 + x2  4,

3x1 + 2x2  6,

x1 0, x2 0.

**Zadanie 2.13.** Znaleźć rozwiązanie optymalne zagadnienia

-2 x12 - x2 2 +9x1- 3x2  min

przy warunkach : x1 + 2x2  4,

3x1 + 2x2  6,

x1 0, x2 0.

**Zadanie 2.14**. Firma „Farbator” posiada trzy zakłady - Z1, Z2, Z3. Zakłady te mogą wytwarzać tę samą farbę "Śnieżna biel". Pomiędzy łącznym kosztem produkcji wytworzonej w zakładach Z1, Z2, Z3, a roczną wielkością produkcji tych zakładów zachodzi zależność

K(x1,x2,x3) = x12 + 2x2 + x32

gdzie x1, x2, x3 oznaczają odpowiednio wielkości rocznej produkcji farby "Śnieżna biel" w zakładach Z1, Z2, Z3 w tys. litrów. Firma planuje roczną wielkość produkcji farby "Śnieżna biel" w ilości co najmniej 9000 litrów. Jakie ilości farby "Śnieżna biel" powinny produkować zakłady Z1, Z2, Z3 aby łączny koszt produkcji był minimalny?

**Zadanie 2. 15**. Przedsiębiorstwo produkuje trzy wypełniacze w wydziałach produkcji pomocniczej. Produkcja ta przeznaczona jest dla własnych potrzeb i wypełniacze te stosowane są w produkcji zamiennie. Oszacowana funkcja kosztów produkcji wypełniaczy ma postać

f(x,y,z) = 0,25x2 + 1,5x + y2 + y + 2z

gdzie: x – wielkość produkcji wypełniacza I w kilogramach,

y – wielkość produkcji wypełniacza II w kilogramach,

z – wielkość produkcji wypełniacza III w kilogramach.

Przedsiębiorstwo zużywa w procesie produkcji co najmniej 2000 kg wypełniaczy. Ile powinny wynosić rozmiary produkcji wypełniaczy, aby koszty produkcji były jak najmniejsze?

**Zadanie 2.16.** Trzy olejarnie o zdolnościach przerobowych 15, 20 i 10 ton ziarna dziennie , mają przerobić 2000 ton ziarna na olej. Straty oleju w ziarnie zależą od procesów technologicznych. Funkcja łączonych strat oleju w ziarnie (w kg) dana jest wzorem

f(x,y,z) = 20x + 3y2 – 4y + 30z

gdzie: x, y, z - to czasy trwania kampanii odpowiednio w pierwszej, drugiej i trzeciej olejarni w dniach. Jak długo powinny trwać kampanie w olejarniach, aby straty oleju w ziarnie były minimalne?

**Zadanie 2. 17.** Znaleźć takie liczby x, y 0 , że

x + y  10

a suma ich kwadratów jest minimalna.

**Zadanie 2.18.** Trzy związki chemiczne A, B i C produkowane są z tego samego surowca którego zapas wynosi 100 t. Do produkcji 1t związku A zużywa się 0,25 t surowca, do produkcji 1t związku B - 0,75 t , a do produkcji 2t związku C – 1,5 t surowca. Ustalić wielkość produkcji tych wyrobów tak, aby zminimalizować funkcję kosztu jednostkowego określoną wzorem

f(x,y,z) = 2x2 + 10y2 – 14y + 5 + z

gdzie

x - wielkość produkcji związku A w tonach,

y - wielkość produkcji związku B w tonach,

z - wielkość produkcji związku C w tonach.

**Zadanie 2.19.** Planowane są prace modernizacyjne w trzech kopalniach. Rezultatem tych prac ma być łącznie wzrost o co najmniej 20.000 t dziennego wydobycia. Koszty prac modernizacyjnych w zależności od planowanego wzrostu wydobycia w poszczególnych kopalniach

(odpowiednio x, y, z- wyrażone w tysiącach ton ) wyraża funkcja

F (x,y) = x2 + 2y2 – 2y + 14 +10z

Zaplanować wielkość przyrostu wydobycia dla poszczególnych kopalń tak, aby koszty prac modernizacyjnych były jak najniższe.

**Zadanie 2.20.** Rozdzielić dzienną produkcję energii wynoszącą co najmniej 300 MWh między dwie elektrownie tak, aby dzienne koszty zużycia paliwa opisane funkcją

f(x,y,z) = 2(–x+1)2 + (y–3)2

gdzie x - zużycie paliwa w elektrowni I, y - zużycie paliwa w elektrowni II, były najniższe. Wiadomo ponadto, że z 1 tony paliwa elektrownia I uzyskuje 5 MWh energii,   
a elektrownia II - 3 MWh.

**Zadanie 2.21.** Z elektrociepłowni energia przesyłana jest do trzech zużywających ją zakładów produkcyjnych. Funkcja kosztów przesyłania energii do tych zakładów w zależności od wielkości przesyłu (x - MWh do zakładu I, y - MWh do zakładu II, z - MWh do zakładu III)

dana jest wzorem

f(x,y,z) = 5x2- 8x – 7y + 7y2 + 10z

Rozdzielić co najmniej 20 MWh pomiędzy zakłady tak, aby zminimalizować koszty przesyłu energii.

**Zadanie 2.22.** Przedsiębiorstwo korzysta z trzech bocznic - własnej, bocznicy huty i PKP. Koszty związane z przestojem wagonów wyraża następująca funkcja:

f(x,y,z) = 0,25x2 + 0,5y2 +4x + 0,6z

gdzie: x - czas trwania wyładunku na bocznicy własnej (w dniach),

y - czas trwania wyładunku na bocznicy PKP,

z - czas trwania wyładunku na bocznicy huty.

Pociągi towarowe wożące surowiec do przedsiębiorstwa mają w swym składzie 200 wagonów. Dzienna zdolność przeładunkowa bocznicy własnej wynosi 20 wagonów, bocznicy huty - 10 wagonów i bocznicy PKP - 30 wagonów. Jak rozdzielić wagony między bocznice, aby koszt związany z przestojem był jak najmniejszy?

**Zadanie 2.23**. Określić dla jakiego parametru k punkt (4 ; 0) będzie rozwiązaniem optymalnym zagadnienia

kx1 + 3x2  max

-x1 + x2  5,

3x1 + x2  12,

x1 0, x2 0.

**2.1. Zagadnienie programowania liniowego**

Niech x=(x1, x2,...,xn)∈n oraz :

f(x) = c1x1+c2x2+...+cnxn

gi (x) = ai1x1+ai2x2+...+ainxn ≤ bn, i = 1, ..., k

gj (x) = aj1x1 +aj2x2+...+ajnxnb = bj, j=k+1, ..., m.

Wtedy zagadnienie (2.3) ma postać:

(PL) 

Zagadnienie (PL) nazywane jest zagadnieniem programowania liniowego.

Zagadnienie programowania liniowego (PL):

1. może mieć dokładnie jedno rozwiązanie optymalne x\* ∈ D,
2. może mieć nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych,
3. może nie mieć rozwiązania optymalnego.

Zagadnienie (PL) nie ma rozwiązania optymalnego w jednym z dwóch przypadków:

1. zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest pusty (warunki ograniczające są sprzeczne) i wtedy zagadnienie (PL) nazywać będziemy **sprzecznym**,
2. zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest nieograniczony oraz funkcja celu f jest nieograniczona z góry dla x∈D i wtedy zagadnienie (PL) nazywać będziemy wtedy **nieograniczonym**.

**Twierdzenie 2.1.1. Jeśli x, y ∈ D są rozwiązaniami optymalnymi zagadnienia (PL) to rozwiązaniem optymalnym jest każdy punkt leżący na odcinku łączącym punkty x i y.**

Wniosek. Jeśli zagadnienie (PL) ma dwa rozwiązania optymalne, to ma ich nieskończenie wiele. W przypadku gdy x=(x1,x2)∈2, bardzo łatwo znaleźć rozwiązanie optymalne lub wykazać,

że go nie ma.

W tym celu posługujemy się metodą geometryczną. Rozważmy zagadnienie (PL) w postaci:



Zbiór rozwiązań dopuszczalnych D określony jest za pomocą warunków ograniczających:



Aby znaleźć rozwiązanie optymalne zagadnienia, najpierw w układzie współrzędnych o osiach xA, xB zaznaczamy zbiór rozwiązań dopuszczalnych rysując brzegi tego obszaru, a więc proste:

1. 3xA+xB =5
2. 2xA+4xB =10
3. xA = 0
4. xB = 0

Następnie poszukujemy obszaru wspólnego dla układu nierówności I-IV.

-2

1

2

3

4

5

3

4

xA

1

2

D

G

xB

(4)

(3)

(1)

(6)

f

2

H

F

E

Rysunek 2.2.

Na rysunku zbiorem rozwiązań dopuszczalnych D jest czworobok o wierzchołkach w punktach E(0,0), F(5/3, 0), G(1,2), H(0,5/2). Jest to zbiór domknięty, wypukły i ograniczony wynika stąd, że funkcja celu (ciągła w D) zagadnienie ma rozwiązanie i rozwiązanie to znajduje się w wierzchołku czworoboku.

Aby znaleźć rozwiązanie optymalne rysujemy prostą odpowiadającą funkcji celu

f(xA,xB) = 3xA+2xB

przyjmując na przykład f(xA,xB) =0.

Mamy wtedy

3xA+2xB= 0

i prostą określoną tym równaniem zaznaczamy na rysunku jako (FC).

Jeśli prostą 3xA+2xB = 0 przesuniemy równolegle w górę (kierunek narysowanej strzałki) to wartość funkcji celu f(xA,xB) powiększy się . Wartość największą funkcja f przyjmie w wierzchołku G(1,2) i jest ona równa f(1,2)=7 . Stąd punkt G(1,2) jest rozwiązaniem optymalnym rozważanego zagadnienia.

Problemy o większych rozmiarach można rozwiązywać się za pomocą metody simpleks , używać do tego celu komputerowych programów specjalistycznych lub specjalnych pakietów arkuszach kalkulacyjnych ( np. arkusz EXCEL pakiet SOLVER).

Zagadnienie programowania liniowego gdzie zbór rozwiązań dopuszczalnych jest podzbiorem zbioru liczb całkowitych nazywamy zagadnieniem **programowania całkowitoliczbowego**. Zagadnienia programowania całkowitoliczbowego można rozwiązywać metodą przeglądu całkowitego ( gdy zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest niewielki) lub metodą podziału i ograniczeń

Zagadnienie liniowe można zawsze zapisać w postaci



Jeśli w zagadnieniu mamy:

1. 

to zagadnienie równoważne będzie miało funkcję celu



przyjmując *ci = -ci`*  funkcja celu w zagadnieniu równoważnym ma postać



1. Jeśli *k*-ta nierówność ma postać



wtedy nierówność tę mnożymy przez *-*1 i otrzymujemy

.

Przyjmując

*aki=-aki’* *i*=1,2,...,*n*   
 oraz

*bk = -bk’*

otrzymujemy nierówność równoważną



1. Jeśli *r*-te ograniczenie ma postać



możemy je zapisać jako układ dwóch nierówności



1. Jeśli zmienna *xr*jest dowolnego znaku (*xr*∈) wtedy w zagadnieniu (PL) wprowadzamy dwie dodatkowe zmienne *xr*`≥0, *xr*``≥0 takie, że

*xr*``= *xr*+ *xr*`

stąd obliczając *xr* mamy

*xr* = *xr*``- *xr*`.

Obliczone *xr* wstawiamy do funkcji celu i wszystkich ograniczeń.

Rozważmy następujący

Przykład 2.1.1:



Zagadnienie to możemy zapisać w postaci równoważnej



Następnie wprowadzając zmienne dodatkowe

*x3*″, *x3*′   
takie aby

*x3*″= *x3* + *x3*′, *x3*″≥0, *x3*′≥0

obliczamy *x3*= *x3*″- *x3*′ i wstawiamy do funkcji celu i ograniczeń otrzymując postać równoważną



**2.1.1. Dualność w programowaniu liniowym**

Z każdym zagadnieniem programowania liniowego związane jest inne zagadnienie liniowe zwane dualnym. Jeśli zagadnienie liniowe ma postać



to zagadnieniem dualnym do zagadnienia (PL) nazywać będziemy zagadnienie



Uwaga. Zagadnieniem dualnym do (*DPL*) jest zagadnienie (*PL*).

Zagadnienia (*PL*) i (*DPL*) nazywamy symetrycznymi zagadnieniami dualnymi.

**Twierdzenie 2.1.2 Jeśli zagadnienie (*PL*) i (*DPL*) mają rozwiązania dopuszczalne, to obydwa mają rozwiązania optymalne.**

**Twierdzenie 2.1.3. Jeśli (x1\*, x2\*,..., xn\*) jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia (*PL*) oraz (y1\*, y2\*,..., ym\*) jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia (*DPL*) to**

**.**

**Twierdzenie 2.1.4. Jeśli (x1, x2,..., xn) jest rozwiązaniem dopuszczalnym zagadnienia (*PL*), (y1, y2,..., ym) jest rozwiązaniem dopuszczalnym zagadnienia (*DPL*) oraz**

****

**to (x1, x2,..., xn), (y1, y2,..., ym) są rozwiązaniami optymalnymi odpowiednio zagadnień (*PL*)   
i (*DPL*).**

**Twierdzenie 2.1.5. Jeśli choć jedno z zagadnień (*PL*) lub (*DPL*) nie ma rozwiązania dopuszczalnego to obydwa nie mają rozwiązań optymalnych.**

**Twierdzenie 2.1.6. (twierdzenie o komplementarności). Niech (x1, x2,..., xn) oraz**

**(y1, y2,..., ym) będą rozwiązaniami dopuszczalnymi odpowiednio zagadnień (*PL*) i (*DPL*).**

**Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby oba te rozwiązania były optymalnymi jest aby spełniony był układ równań:**

****

**Twierdzenie 2.1.7. Jeśli (x1, x2,..., xn) oraz (y1, y2,..., ym) są rozwiązaniami dopuszczalnymi odpowiednio zagadnień (*PL*) i (*DPL*) to zachodzi nierówność**

****

Wniosek. Z twierdzenia 2.1.7. wynika, że:

- jeśli zagadnienie (*PL*) jest nieograniczone to zagadnienie (*DPL*) jest sprzeczne,

- jeśli zagadnienie (*DPL*) jest nieograniczone to zagadnienie (*PL*) jest sprzeczne.

**2.1.2. Interpretacja ekonomiczna zagadnienia dualnego**

Rozważmy

Przykład 2.1.2.1: Zakład planuje produkcję dwóch wyrobów A i B. Zysk ze sprzedaży jednostki wyrobu A wynosi 3 jp, wyrobu B – 2 jp. Do produkcji wyrobów zużywa się dwa środki, pracę maszyn i związek chemiczny, których dzienne zużycie jest ograniczone.

W tabeli zapisano ilości zużywanych środków na wytworzenie jednostki każdego wyrobu oraz dzienne limity zużycia tych środków.

Tablica 2.1.2.1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | Dzienny limit zużycia |
| Praca maszyn [h] | 3 | 1 | 5 |
| Związek chemiczny [kg] | 2 | 4 | 10 |

Wyznaczyć dzienny plan produkcji wyrobów A i B w taki sposób, aby wyprodukowane wyroby przyniosły największy zysk.

Oznaczmy przez:

xA – liczbę wyprodukowanych w ciągu dnia sztuk wyrobu A,

xB – liczbę wyprodukowanych w ciągu dnia sztuk wyrobu B.

Zagadnienie (PL) będzie miało postać:



Zagadnieniem dualnym do niego będzie zagadnienie



Jak można zinterpretować zmienne *y1*, *y2* w zagadnieniu dualnym (DPL)?

Przeanalizujmy nierówności (I) i (II).



Stąd wynika, że zmienne *y1, y2* oznaczają wartość zasobów w jednostkach pieniężnych zysku i tak:

*y1* - wartość godziny pracy maszyn wyrażoną w jednostkach pieniężnych zysku,

*y2* - wartość kilograma środka chemicznego wyrażoną w jednostkach pieniężnych zysku.

Jeśli *y1\**, *y2\** są rozwiązaniami optymalnymi programu dualnego nazywamy je cenami dualnymi odpowiednich środków produkcji.

Funkcja celu zagadnienia (DPL) ma postać



Zatem minimalizuje się wartość środków produkcji wyrażoną w jednostkach pieniężnych zysku, przy warunkach określających, że wartość środków (wyrażona w cenach dualnych) potrzebna na wytworzenie jednej jednostki każdego z produktów jest nie mniejsza od zysku osiąganego z wytworzenia jednostki tego produktu.

UWAGA. Rzeczywiste ceny środków produkcji nie mają nic wspólnego z cenami dualnymi tych środków.

Gdyby producent wyrobów A i B zamierzał sprzedać środki produkcji (czas pracy maszyn [h] oraz środek chemiczny [kg]) w cenach odpowiednio *y1* jp oraz *y2* jp za jednostkę środka produkcji, to opłaci się je sprzedać gdy



Rozwiążmy zagadnienie dualne (DPL).

Korzystając z twierdzenia o komplementarności

mamy

  
Wiadomo, że xA=1, xB=2 jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia(PL), zatem



stąd



Tak więc  jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia (DPL).

Jeśli więc konkurencja jest skłonna zapłacić co najmniej



to sprzedaż tych środków produkcji przyniesie zysk w wysokości co najmniej 7 jp. Wiadomo, że produkcja wyrobów A i B może przynieść maksymalny zysk 7 jp. Jeśli więc otrzymana kwota ze sprzedaży środków produkcji (uwzględnianych w ograniczeniach) jest większa lub równa 7 jp, to warto te środki sprzedać rezygnując z produkcji.

Rozważmy teraz nasze zagadnienie gdy liczbę godzin pracy maszyn zwiększymy do 16.

Zagadnienie pierwotne ma teraz postać:



Rozwiązaniem optymalnym tego zagadnienia jest xA = 5, xB = 0.

Zagadnienie dualne ma postać



Rozwiążmy zagadnienie dualne korzystając z twierdzenia o komplementarności



Rozwiązaniem tego układu równań jest:

xA = 5, xB = 0,

y1 = 0, y2 = 1,5.

Stąd wynika, że cena dualna godziny pracy maszyn jest równa 0 pomimo tego, że środek ten jest zużywany w produkcji, zatem służy do osiągnięcia zysku.

Cena ta została wyliczona z trzeciego z powyższych równań ( 3xA + xB > 16 dla xA = 5,   
xB = 0). Można zatem uważać, ze środki, których jest nadmiar w produkcji, mają cenę dualną równą zero.

Mamy także xB = 0 gdyż w równaniu drugim y1 + 4y2 > 2 dla y1 = 0, y2 = 1,5.

Stąd wynika, że nie należy produkować tych wyrobów, dla których wartość zużytych środków (liczona w cenach dualnych) przekracza zysk z produkcji jednostki tego wyrobu.

* + 1. **Przykłady zagadnień programowania matematycznego**

# 2.1.3.1. Zagadnienie optymalnego wykorzystania urządzeń produkcyjnych

Przedsiębiorstwo może wytwarzać *N* wyrobów na *M* urządzeniach. Istnieje *K* sposobów wytworzenia każdego z *n* wyrobów ( *n = 1,2,...,N* ). W czasie *akmn* wytwarzana jest jednostka *n*-tego wyrobu na *m*-tym urządzeniu, *k*-tym sposobem ( *n=1,2,...,N* ; *m=1,2,...M* ; *k=1,2,...,K* ).

W planowanym okresie *T* na *m*-tym urządzeniu można wytwarzać wyroby w ciągu *bm* jednostek czasu ( *m=1,2,...M* ). Z jednostki produkcji *n*-tego wyrobu *k*-tym sposobem przedsiębiorstwo osiąga zysk w wysokości *skn* ( *k=1,2,...,K*; *n=1,2,...,N* ) jednostek pieniężnych.

Sformułować model optymalnego planu wykorzystania mocy produkcyjnej urządzeń przedsiębiorstwa, przyjmując jako kryterium optymalności wielkość zysku.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez *xkn* wielkość produkcji *n*-tego wyrobu *k*-tym sposobem (*k=1,...,K; n=1,...,N* ).

Produkcję w wysokości *xkn* jednostek na *m*-tym urządzeniu można wytworzyć w ciągu *tnk=akmnxkn*

( *k=1,...,K; m=1,...,M; n=1,...,N* ) jednostek czasu.

Wykonując produkcję w wielkości *xkn* jednostek na *m*-tym urządzeniu wszystkimi sposobami zużywa się  (  *m=1,...,M; n=1,...,N* ) jednostek czasu *m*-tego urządzenia.

Jeżeli na *m*-tym urządzeniu będzie wykonywana produkcja wielkości *xkn* jednostek dla wszystkich *N* wyrobów i wszystkimi sposobami, to potrzeba będzie

 (  *m=1,...,M* ) jednostek czasu.

W planowanym okresie *T* na *m*-tym urządzeniu można wykonywać wyroby przez okres nie przekraczający *bm* jednostek, więc muszą być spełnione warunki :

 (  *m=1,...,M* ).

Zysk osiągnięty z produkcji *xkn* jednostek *n*-tego wyrobu *k*-tym sposobem wynosi *zkn=cknxkn* ( *k=1,...,K; n=1,...,N* ) , zysk z produkcji n-tego wyrobu wykonanego wszystkimi sposobami jest równy ( *n = 1,2,...,N* ). Ostatecznie zysk z produkcji wszystkich wyrobów określony jest wielkością .

Model optymalnego planu wykorzystania urządzeń produkcyjnych przedsiębiorstwa można sformułować następująco:

wyznaczyć wartości zmiennych *xkn* ( *k=1,...,K; n=1,...,N* ) w taki sposób, aby spełniały warunki:

 (  *m=1,...,M* ).

 ( *k=1,...,K; n=1,...,N* )

i jednocześnie maksymalizowały funkcję celu

.

**2.1.3.2. Zagadnienie transportowe**

W *m* punktach dostawy *Di* ( *i=1,2,...,m* ) znajduje się jednorodny produkt w ilościach *ai* (*i=1,2,...,m* ), który należy dostarczyć do *n* punktów odbioru *Oj* ( *j=1,2,...,n* ). Zapotrzebowanie na ten produkt w punktach odbioru *Oj* wynosi odpowiednio *bj*  (*j=1,2,...,n* ). Znane są koszty *cij* przewozu jednostki produktu z *i*-tego punktu dostawy *Di* do *j*-tego punktu odbioru *Oj*. Określić optymalny plan przewozu z danych punktów dostaw do danych punktów odbioru minimalizując koszty przewozów.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez *xij* ( *i=1,2,...,m* ; *j=1,2,...,n* ) wielkość przewożonego ładunku od *i*-tego dostawcy do *j*-tego odbiorcy.

Mamy

1. ,
2.  ,
3.  .

Optymalnym planem przewozu nazywamy taki plan *xij* ( *i=1,2,...,m; j=1,2,...,n* ), w którym:

 .

**2.1.3.3. Zagadnienie minimalizacji pustych przebiegów**

W zagadnieniu tego rodzaju chodzi o minimalizację drogi pokonywanej przez środki transportu bez ładunku (tzw. pustych przebiegów).

Założenia są następujące:

1. Istnieje *N* punktów, między którymi odbywa sie wymiana towarówpunkty te tworzą układ zamknięty.
2. Każdy z punktów może być zarówno dostawcą jak i odbiorcą.
3. Towary przywozi sie i wywozi tym samym środkiem transportu (samochód, wagon, kontener).
4. Znane są odległości miedzy punktami *cij*.
5. Znany jest przewóz masy towarowej (*aij*) pomiędzy punktami wyrażony liczbą pełnych środków transportu.

Rozwiązanie:

Liczba pełnych środków transportu wysyłanych z punktu *i* to

*ai* = ,

natomiast liczba przyjętych pełnych środków transportu w punkcie *i* to

*bi*= .

Jeśli *ai*- *bi* > 0 to punkt *i* jest dostawcą pustych środków transportu.

Jeśli *ai*- *bi* < 0 to punkt *i* jest odbiorcą pustych środków transportu.

Punkt i dla którego *ai*- *bi* = 0 można wyeliminować z zagadnienia gdyż nie jest ani dostawcą ani odbiorcą pustych środków transportu. Oznaczmy przez *xij* liczbę pustych środków transportu przesyłanych z punktu *i* (dostawcy pustych środków transportu) do punktu *j* (odbiorcy pustych środków transportu) (*i, j*=1,2,…,*N*).

Można utworzyć więc zagadnienie transportowe



gdzie *n* to liczba dostawców pustych środków transportu, *m* to liczba odbiorców pustych środków transportu**.**

**2.1.3.4. Zagadnienie optymalnego załadunku**

Na pojazd o nośności *Q* [ ton ] i pojemności *P* [ m3 ] należy załadować *N* różnych towarów. W magazynie znajduje się *Dn* jednostek *n*-tego towaru ( *n*=1,2,...,*N* ). Czas załadunku nie powinien przekraczać *T* jednostek. Ciężar, objętość *n*-tego towaru wynoszą odpowiednio *qn* [ ton ] i *pn* [ m3 ], a czas jego załadunku wynosi *tn* jednostek czasu. Zysk z przewozu jednostki *n*-tego towaru wynosi *cn* jednostek pieniężnych ( *n*=1,2,...,*N* ). Określić optymalny załadunek pojazdu, przyjmując jako kryterium łączny zysk uzyskany z przewozu towarów.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez *xn* liczbę jednostek *n*-tego towaru ( *n*=1,2,...,*N* ), który powinien być załadowany na pojazd.

Mamy



 ( łączna objętość )

 ( łączna pojemność )

 ( łączny czas )

Zysk osiągnięty z przewozu towarów ma być maksymalny

.

# 2.1.3.5. Zagadnienie optymalnego rozdziału jednorodnych zasobów

Istnieje *p* źródeł wzajemnie zastępowalnych zasobów w ilościach odpowiednio *a1,a2,..., ap* jednostek oraz *q* możliwych zastosowań tych zasobów, w których można je wykorzystać w ilościach odpowiednio *b1, b2, ...., bq* jednostek.

Dana jest macierz nakładów *cik* wykorzystania jednostki *i*-tego zasobu w *k*-tym zastosowaniu ( *i*=1,2,...,*p* ; *k*=1,2,...,*q* ). Wyznaczyć optymalny rozdział zasobów między możliwe zastosowania, przy którym łączne nakłady osiągną minimum.

Rozwiązanie:

Niech *xik* oznacza ilość *i*-tego zasobu wykorzystywanego w *k*-tym zastosowaniu ( *i*=1,2,...,*p* ; *k*=1,2,...,*q* )

 ( *i*=1,2,...,*p* ; *k*=1,2,...,*q* ) .

# 

# 2.1.3.6. Model optymalnego asortymentu produkcji

Przedsiębiorstwo posiada *m* środków produkcji *S1, S2, ..., Sm* w ilościach odpowiednio *b1, b2, ..., bm* i wytwarza *n* różnych produktów. Wiadomo, że potrzeba *aij* ( *i*=1,2,...,*m* ; *j*=1,2,...,*n* ) jednostek *i*-tego środka produkcji dla wytworzenia jednostki *j*-tego produktu. Z jednostki *j*-tego produktu przedsiębiorstwo osiąga zysk w wysokości *cj* jednostek pieniężnych. Przyjmując jako kryterium optymalności zysk sformułować optymalny plan produkcji.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez *xj* (*j*=1,2,...,*n* ) wielkość produkcji *j*-tego wyrobu. Zużycie środka produkcji *Si* przy wytwarzaniu wszystkich produktów w ilościach *xj* (*j*=1,2,...,*n* ) wynosi:

 *i*=1,2,...,*m*.

Z ograniczoności zasobów środków produkcji wynikają ograniczenia:

 ( *i*=1,2,...,*m* ).

Zysk osiągnięty z produkcji wynosi:



Program liniowy dla tego zagadnienia ma więc postać:

 ( *i*=1,2,...,*m* ; *j*=1,2,...,*n* ) .

# 2.1.3.7. Model optymalnego składu mieszanki ( diety )

Należy określić jakie ilości produktów *P1, P2, ..., Pn* powinny zostać zakupione, aby przy racjonalnym zaspokojeniu potrzeb obniżyć do minimum koszty zakupu. Wiadomo, że minimalne zapotrzebowanie na składniki odżywcze w produktach *P1, P2, ..., Pn* wynosi odpowiednio *b1,b2,...,bm* jednostek. W jednostce produktu *Pj* ( *j*=1,2,...,*n* ) znajduje się *aij* jednostek składnika *Si* *i=*1,2,...,*m*. Cena jednostki produktu *Pj* wynosi *cj* ( *j*=1,2,..,*n* ).

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez *xj* ( *j*=1,2,..,*n* ) wielkość zakupu produktu *Pj .*

Warunek dla zaspokojenia potrzeb na *Si* składnik odżywczy m a postać:

 ( *j*=1,2,..,*n* ; *i=*1,2,...,*m* ).

Koszt zakupu wynosi:

.

Program liniowy tego zagadnienia ma więc postać:

 ( *i*=1,2,...,*m* ; *j*=1,2,...,*n* ).

# 2.1.3.8. Zagadnienie optymalnego rozdziału czynności

Należy dokonać optymalnego przydziału *q* czynności pomiędzy *p* wykonawców. Dana jest efektywność *cik* realizacji *i*-tej czynności ( *i*=1,2,...,*q* ) przez *k*-tego wykonawcę ( *k*=1,2,...,*p* ).

Rozwiązanie:

Oznaczmy *xik* =1 , gdy *i*-ta czynność jest wykonywana przez *k*-tego wykonawcę, *xik* = 0, gdy *i*-ta czynność nie jest wykonywana przez *k*-tego wykonawcę ( *i*=1,2,...,*q* ; *k*=1,2,...,*p* ).

Zakładamy, że spełnione są warunki:

1. każdy wykonawca może wykonywać tylko jedną czynność,

2. każda czynność może być wykonywana przez jednego wykonawcę.

a) Jeżeli jest spełniony warunek *p* = *q* oraz 1. i 2. wtedy optymalny przydział spełnia warunki:



b) Jeżeli jest spełniony warunek *p* ≥ *q* oraz 1. i 2. wtedy optymalny przydział spełnia warunki:



c) Jeżeli jest spełniony warunek *p* ≤ *q* oraz 1. i 2. wtedy optymalny przydział spełnia warunki:



Optymalny przydział *xij* ( *i*=1,2,...,*q* ; *k*=1,2,...,*p* ) maksymalizujące funkcję łącznej efektywności:

.

# 2.1.3.9. Zagadnienie optymalnego rozkroju ( wariant 1 )

Z arkuszy materiału o znormalizowanych wymiarach należy otrzymać *m* różnych detali. Istnieje możliwość wykrawania tych detali z jednego arkusza materiału *n* różnymi sposobami. Należy wykroić *bi* ( *i*=1,2, ..., *m* ) detali *i*-tego rodzaju. Przy cięciu materiału *j*-tym sposobem otrzymujemy *aij* ( *i*=1,2, ..., *m* ; *j*=1,2, ..., *n* ) jednostek. Sformułować model optymalnego programu cięcia arkuszy materiału, który zapewni minimalną ilość odpadków.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez *xj* ( *j*=1,2, ..., *n* ) liczbę arkuszy materiału, które będą cięte *j*-tym sposobem. Przez *cj* oznaczmy odpad powstały przy *j*-tym sposobie cięcia. Warunki ograniczające, które wynikają z określonej z góry liczby sztuk poszczególnych detali zapiszemy w postaci:

 ( *i*=1,2, ..., *m* )

Przecinając *x1* arkuszy sposobem pierwszym, *x2* sposobem drugim , ,*xn*sposobem n-tym ., otrzymamy odpad:

 .

Rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do ustalenia takich całkowitych wartości zmiennych decyzyjnych *x1, x2, ..., xn* , które spełniają warunki:

 ( *i*=1,2, ..., *m* )

 = 0,1,2, ... ( *j*=1,2, ..., *n* )

i minimalizują funkcję celu postaci



# 2.1.3.10. Zagadnienie optymalnego rozkroju ( wariant 2 )

Z pewnych półfabrykatów *P1, P2, ..., Pm* takich jak deski, arkusze itd. o znormalizowanych wymiarach, danych w ilościach odpowiednio *b1, b2, ...,bm* sztuk, produkuje się pewne komplety składające się z określonej liczby detali. Każdy komplet zawiera *k1* detali pierwszego rodzaju, *k2* detali drugiego rodzaju, ... , *kl* detali *l*-tego rodzaju.

Każdą jednostkę półfabrykatu *Pi* ( *i*=1,2, ..., *m* ) można pociąć *n* różnymi sposobami. Przy cięciu półfabrykatu *Pi* *j*-tym sposobem otrzymuje się *aijs* detali *s*-tego typu.

Sformułować model optymalnego programu cięcia półfabrykatów *P1, P2, ..., Pm* , który zapewni produkcję maksymalnej liczby pełnych kompletów.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez *xij* liczbę sztuk półfabrykatów *Pi* , które są cięte *j*-tym sposobem. Z partii półfabrykatu *Pi* ciętej *j*-tym sposobem otrzymujemy *aijsxij* detali *s*-tego rodzaju, gdzie 0 ≤ *s* ≤ *l*. Z partii półfabrykatu *Pi* ciętej wszystkimi sposobami otrzymujemy:

 detali *s*-tego rodzaju.Z półfabrykatów *P1, P2, ..., Pm* ciętych wszystkimi sposobami otrzymujemy:  detali *s*-tego rodzaju. Ponieważ, do każdego kompletu potrzeba *ks* detali *s*-tego rodzaju, więc  detali pozwoli wytworzyć  pełnych kompletów. Pamiętając, że w skład pełnego kompletu wchodzi *l* różnych detali, a więc pełnych kompletów według programu cięcia *xij* otrzymamy:

 sztuk.

Wprowadzamy dodatkową zmienną *ξ* = 0,1,2,... i spełniającą warunki:



....



....



Zmienna *ξ*  określa liczbę pełnych kompletów. Model danego zagadnienia, możemy sformułować następująco:

Znaleźć maksimum funkcji

Z = *ξ*

przy ograniczeniach:

 ( *s*=1,2, ..., *l* ),

 ( *i*=1,2, ..., *m* ),

*xij* = 0,1,2, ... ,

*ξ* = 0,1,2,...

# 2.1.3.10. Wybór optymalnej struktury zasiewów

Gospodarstwo rolne posiada *M* pól o różnej urodzajności i powierzchni pod zasiew *N* rodzajów płodów rolnych. Powierzchnia poszczególnych pól różnych pod względem urodzajności wynosi odpowiednio *A1, A2, ..., AM* hektarów. Średnia wielkość zbiorów *n*-tego ( *n=*1,2,...,*N* ) płodu

na *m*-tym ( *m=*1,2,...,*M* ) polu wynosi *amn* kwintali z hektara. Przewiduje się, że zbiory *n*-tego płodu będą wynosiły co najmniej *bn* kwintali. Cena sprzedaży 1 kwintala *n*-tego płodu wynosi *cn* jednostek pieniężnych.

Określić optymalną strukturę zasiewów, przyjmując za kryterium optymalności dochód ze sprzedaży wszystkich rodzajów płodów z całej powierzchni zasiewów.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez *xmn* ( *n=*1,2,...,*N* ; *m=*1,2,...,*M* ) powierzchnię przeznaczoną pod zasiew *n*-tego płodu na *m*-tym polu o powierzchni *Am* . Zmienne *xmn* ( *n=*1,2,...,*N* ; *m=*1,2,...,*M* ) nie są ujemne. Jeżeli wykorzystywana jest cała powierzchnia *Am*, to musi być spełniony warunek

 ( *m=*1,2,...,*M* ).

Przewidywana wielkość zbiorów *n*-tego płodu z *m*-tego pola o powierzchni *Am* jest równa *amnxmn* kwintali, a ze wszystkich pól wynosi:

 ( *n=*1,2,...,*N* ).

Zgodnie z założeniem, wielkości zbiorów *n*-tego płodu nie może być mniejsza niż *bn* kwintali, czyli muszą być spełnione warunki:

 ( *n=*1,2,...,*N* ).

Przewidywany dochód ze zbiorów *n*-tego płodu wynosi:

 ( *n=*1,2,...,*N* ).

Łączny przewidywany dochód za zbiorów wszystkich płodów jest równy:

.

Model optymalnej struktury zasiewów sformułować można w sposób następujący:

Zmaksymalizować funkcję celu



przy ograniczeniach

 ( *m=*1,2,...,*M* ),

 ( *n=*1,2,...,*N* ),

*xmn* ≥ 0 ( *n=*1,2,...,*N* ; *m=*1,2,...,*M* ).

# 2.1.3.11. Zagadnienie komiwojażera

Nazwa pochodzi od typowej ilustracji problemu, przedstawiającej go z punktu widzenia wędrownego sprzedawcy (komiwojażera): dane jest *n* miast, które komiwojażer ma odwiedzić tylko raz, oraz *cij* odległość/cena podróży/czas podróży pomiędzy każdą parą miast. Celem jest znalezienie najkrótszej/najtańszej/najszybszej drogi łączącej wszystkie miasta zaczynającej się i kończącej się w określonym mieście.

**Symetryczny problem komiwojażera (STSP)** polega na tym, że dla dowolnych miast A i B odległość z A do B jest taka sama jak z B do A. W **asymetrycznym problemie komiwojażera (ATSP)** odległości te mogą być różne.

Zagadnienie to można zapisać korzystając z zagadnienia transportowego .

Oznaczmy *xij* =1 , gdy komiwojażer wyrusza z miasta *i* dojeżdża bezpośrednio do miasta *j* , w przeciwnym wypadku *xij* = 0 ( *i, j*=1,2,...,*n*).

Z każdego miasta *i* komiwojażer wyrusza tylko raz

,

Do każdego miasta *j* komiwojażer przybywa tylko raz

.

Dodatkowo jeszcze trzeba zapisać warunek eliminujący powstanie cyklu pomiędzy miastem *i* i miastem *j* (komiwojażer wyrusza z miasta *i* przybywa bezpośrednio do miasta *j* i nie wraca z niego już do miasta *i* przyjmie on postać:



Łączna trasa przebyta przez komiwojażera to



zatem



# 2.1.3.12. Zagadnienie programowania ilorazowego

Zagadnienie programowania ilorazowego ma postać



Zagadnienie to można rozwiązać korzystając z programowania liniowego.

W tym celu należy przekształcić zagadnienie (*PH*) do postaci liniowej.

Przyjmijmy oznaczenia:

*yi = r* *xi* dla *i =* 1, 2, 3*,…,n,*

gdzie

.

*.*

Aby wielkość *r* była określona trzeba założyć, że> 0.

Zagadnienie przyjmie postać:



 =1



Aby powyższe zagadnienie rozwiązać metodami programowania liniowego trzeba do obszaru rozwiązań dopuszczalnych dołączyć punkt *r* = 0. Zagadnienie przyjmie wtedy postać liniową (PHL)



(*PHL*)  =1



W celu znalezienia rozwiązania korzystamy z następujących twierdzeń

**Twierdzenie 1***.* **Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to aby zagadnienie *(PH)* miało rozwiązanie optymalne jest aby zagadnienie *(PHL)* miało rozwiązanie optymalne, dla którego *r > 0.* Rozwiązanie to jest równe.**

**Twierdzenie 2***.* **Jeśli zagadnienie *(PHL)* jest sprzeczne to zagadnienie *(PH)* także jest sprzeczne**.

**Twierdzenie 3. Jeśli dla każdego rozwiązania optymalnego zagadnienia (*PHL*) zachodzi *r* = 0 to zagadnienie (*PH*) nie ma rozwiązania optymalnego.**

**Zadania**

Zadanie 2.1.1. Metodą graficzną wyznaczyć rozwiązania optymalne zagadnienia programowania liniowego.

x1 – 2x2   min

x1 – x2   1

x1  + x2  2

x1 - 2x2  0

x1 , x2   0

Zadanie 2.1.2. Metodą graficzną wyznaczyć rozwiązania optymalne zagadnienia programowania liniowego.

5x1 + 2x2   min

3x1 + 5x2   15

5x1  + 2x2  10

x1 , x2   0

Zadanie 2.1.3. Metodą graficzną wyznaczyć rozwiązania optymalne zagadnienia programowania liniowego.

x1 + 2x2   max

x1 – x2   1

2x1  + x2  2

x1 - x2  0

x1 , x2   0

Zadanie 2.1.4.Następujące zadanie programowania liniowego sprowadzić do postaci dualnej.

x1 +4x2  + x3 -3x4  max

2x1 – 4x2 + x3 - 3x4 + x5 = 2

x3  + 2x4 + 2x5  -3

2x2 + x4 - 2x5  10

x1 , x2  ,x3 , x4 , x5  0

Zadanie 2.1.5. Następujące zadanie programowania liniowego sprowadzić do postaci dualnej.

Rozwiązać metodą graficzną zagadnienie dualne, a następnie posługując się twierdzeniem o komplementarności wyznaczyć rozwiązanie zagadnienia pierwotnego.

3x1 – 2x2  + x3 -3x4  min

2x1 – x2  - 5x3  2

6x2  + 3x3  6

x1 , x2  ,x3 , x4  0

Zadanie 2.1.6. Następujące zadanie programowania liniowego sprowadzić do postaci dualnej.

Rozwiązać metodą graficzną zagadnienie dualne, a następnie posługując się twierdzeniem o komplementarności wyznaczyć rozwiązanie zagadnienia pierwotnego.

.

3x1 – 2x2  + x3 -3x4  max

x1 – x2  + 2x3  2

2x2  - 3x3  -6

x1 , x2  ,x3 , x4  0

Zadanie 2.1.7. Następujące zadanie programowania liniowego sprowadzić do postaci dualnej.

Rozwiązać metodą graficzną zagadnienie dualne, a następnie posługując się twierdzeniem o komplementarności wyznaczyć rozwiązanie zagadnienia pierwotnego.

3x1 +4x2  + x3 -3x4  max

x3  + 2x4 + 2x5  3

2x2 - x4 - x5  10

x1 , x2  ,x3 , x4  0, x5 dowolnego znaku

Zadanie 2.1.8. Zdolność produkcyjna zakładu umożliwia wytwarzanie 300 silniczków typu A lub 600 silniczków typu B w ciągu jednej zmiany. Ustalić ile silniczków każdego typu powinien produkować zakład aby wytworzyć maksymalną liczbę silniczków?

Zagadnienie rozwiązać metodą graficzną.

Zadanie 2.1.9. Zdolność produkcyjna zakładu umożliwia wytwarzanie 200 silniczków typu A lub 250 silniczków typu B w ciągu jednej zmiany. Ustalić ile silniczków każdego typu powinien produkować zakład aby osiągnąć maksymalny zysk, jeśli zysk ze sprzedaży jednego silniczka typu A jest dwa razy większy od zysku ze sprzedaży silniczka typu B?

Zagadnienie rozwiązać metodą graficzną.

Zadanie 2.1.10. Zdolność produkcyjna wydziału obróbki cieplnej zakładu umożliwia wytwarzanie w ciągu miesiąca 600 detali typu X lub 1200 detali typu Y. Po obróbce cieplnej detale trafiają do wydziału obróbki mechanicznej. Zdolności produkcyjne tego wydziału

pozwalają dokonać obróbki 1200 detali X lub 800 detali Y w ciągu miesiąca. Ustalić ile detali powinien produkować miesięcznie zakład aby osiągnąć maksymalny przychód jeśli ceny obu detali są jednakowe ? Zagadnienie rozwiązać metodą graficzną.

Zadanie 2.1.11. Fabryka zabawek może wytwarzać dwa typy samochodzików A i B sterowanych radiem .Zdolności produkcyjne poszczególnych wydziałów przedstawiono w tablicy

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Wydział | Liczba samochodzików wytworzonych w ciągu miesiąca | |
| A | B |
| Przygotowania produkcji  Tłoczenia karoserii  Montowania silniczków  Montowania radia  Kontroli i pakowania | 125  80  110  240  160 | 110  320  110  120  80 |

Określić miesięczny plan produkcji samochodzików przynoszący maksymalny zysk jeśli zysk ze sprzedaży jednego samochodziku A wynosi 20 jp., samochodziku B- 30 jp.

Zadanie 2.1.25. Pan Karol posiada pewną kwotę, którą chciałby zainwestować w akcje i lokaty. Wiadomo, że akcje mogą przynieść zysk w wysokości 19% zainwestowanej w nie kwoty, natomiast obligacje - 16%. W jaki sposób powinna zostać optymalnie zainwestowana posiadana przez pana Karola kwota jeśli zakłada, że zyski powinny być nie mniejsze niż 17% zainwestowanej kwoty, a kwota zainwestowana w akcje nie powinna przekraczać 60% całej kwoty przeznaczonej na inwestycje.

Zadanie 2.1. 12. Rolnik posiada dwa pola o powierzchniach odpowiednio 15 ha i 30 ha. W związku ze specjalizacją produkcji zamierza wprowadzić jedynie trzy uprawy: szparagi, kapustę pekińską oraz orzeszki ziemne. W zależności od rodzaju uprawy zmienia się koszt uprawy jednego hektara. Dla szparagów wynosi on 1500 zł, dla kapusty 1000 zł, dla orzeszków 1200 zł. Na wydajność z hektara ma wpływ pogoda. W przypadku pogody umiarkowanej wydajność kształtuje się na poziomie 2 q/ha, 3 q/ha i 2.5 q/ha odpowiednio dla szparagów, kapusty, orzeszków stanowiąc jednocześnie poziom odniesienia dla pozostałych wydajności. W przypadku wystąpienia upałów wydajność zmniejsza się o 15%, w przypadku deszczy wydajność spada do 65% założonych wydajności w przypadku umiarkowanej pogody. Cena, za jaką rolnik sprzedaje swoje uprawy jest stała, niezależna od pogody i wynosi odpowiednio dla szparagów, kapusty, orzeszków :100 zł/q, 80 zł/q i 70 zł/q. Rolnik uznaje, że opłaca mu się uprawiać ziemię, kiedy jego oczekiwany zysk jest nie mniejszy niż 10.000 zł. Długoterminowa prognoza zakłada, że deszcze wystąpią z prawdopodobieństwem 0,15, upały – 0,35 ,a pogoda umiarkowana – 0,5. Zapisać program linowy pomocny w podjęciu decyzji o uprawach.

Zadanie 2.1.13. Krawcowa może zakupić nie więcej niż 32 małych odpadków materiału po 5 zł za sztukę lub nie więcej niż 45 dużych po 15 zł za sztukę. Z jednego małego kawałka wykrawa 40 kwadraty ,30 trójkątów i 50 rombów albo 10 kwadratów 50 trójkątów i 100 rombów. Duży kawałek może być rozcinany na dwa sposoby pierwszy z nich pozwala uzyskać 50 kwadratów, 20 trójkątów i 150 rombów. Drugim sposobem otrzyma 120 trójkątów i 200 rombów. Kawałki zszywane są ze sobą, w ten sposób powstaje zabawna pacynka (5 kwadraty, 4 trójkąty i 10 rombów) sprzedawana po 7 zł. Zapisz program liniowy, który pozwoli na maksymalizowanie zysku krawcowej.

## Zadanie 2.1.14. Mroźna zima i lawinowo rosnące zamówienia zmusiły frmę ‘PTASI-BAR’ wzmożenia produkcji karmników. Firma w magazynie posiada 20 płyt dużych i 15 małych. Płyty te rozcinane są na kawałki w trzech typach A, B, C. Z dużej płyty można wyciąć 120 kawałków A, 130- B i 160 - D. Jeżeli zastosuje się inny sposób cięcia otrzymać można 50 kawałków A, 30 - B i 250 - D. Małe płyty można również rozkrawać na dwa sposoby: 30 kawałków A, 40 - B, 20 - C albo 50 -B i 40 - C. Zapisać program liniowy maksymalizujący wartość sprzedaży karmników wiedząc, że na jeden karmnik przypadają 2 elementy A, 3- B i 4 -C oraz karmniki sprzedawane są po 15 zł.

Zadanie 2.1.15. Rozdzielić produkcję 4 elementów na 3 maszyny. Jedna maszyna może produkować, co najwyżej jeden element, żaden element nie może być produkowany więcej niż na jednej maszynie. Tabela podaje koszty produkcji partii elementów w tysiącach złotych oraz jej wielkość w tysiącach sztuk w rozbiciu na poszczególne maszyny. Podana jest cena, za jaką zakład może sprzedać jedną sztukę wyprodukowanego elementu w zł. W jaki sposób przydzielić poszczególne maszyny do produkcji elementów aby osiągnąć maksymalny zysk?

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Element | Wielkość produkowanej partii na maszynie w tys. szt. | | | Koszt produkcji partii elementów w tys. zł. | | | Cena elementu |
| M1 | M2 | M3 | M1 | M2 | M3 |
| A | 1 | 2 | 0,5 | 5 | 6 | 7 | 10 |
| B | 2 | 1,5 | 1,5 | 3,5 | 4,5 | 5,5 | 5 |
| C | 3 | 2 | 2 | 5,5 | 4,5 | 7 | 7 |
| D | 4 | 2 | 2 | 6 | 5,5 | 6 | 9 |

## Zadanie 2.1.16. .Rafineria wytwarza trzy rodzaje olejów A, B, C z trzech surowców I, II, III, których może zamówić odpowiednio 200 tys. ton , 300 tys. ton i 250 tys. ton . Do produkcji oleju A należy użyć surowców I, II, III odpowiednio w proporcjach 2:4:3, do oleju B surowca II i III w proporcji 3:4, do oleju C surowców I, II, III odpowiednio w proporcjach 4:3:2. Koszt jednej tony surowca I, II, III wynosi odpowiednio 23, 55, 40 jp. Oleje A, B, C rafineria sprzedaje odpowiednio po 70, 50, 65 jp. Ustalić plan zamówień surowców oraz produkcji mający na uwadze maksymalizacje zysku i wyprodukowanie minimum po 50 tysięcy ton każdego oleju.

Zadanie 2.1.17. Przetwórnia ropy naftowej wytwarza trzy rodzaje benzynA, B, C z trzech surowców I, II, III*,*. Do zakładu dostarczono 200 tys. ton surowca I, 300 tys. ton surowca II i 250 tys. ton surowca III. Do produkcji benzyny A należy użyć surowców I, II, III odpowiedniow proporcjach 2:4:3, do benzyny B surowca I i III w proporcji 2:3, do benzyny C- surowców I, II, III odpowiedniow proporcjach 2:5:4. Ustalić plan produkcji benzyn mający na uwadze maksymalne wykorzystanie surowca.

Zadanie 2.1.18. Przedsiębiorstwo przewozowe ‘ STAR ‘ zajmuje się dostarczaniem lodów do sklepów. Dane dotyczące kosztów przewozu jednostki z magazynu do sklepu oraz wielkości zapasów i zapotrzebowania zamieszczono w tabeli. Określić plan przewozu minimalizujący koszty.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Magazyn  Sklep | M1 | M2 | M3 | M4 | Zapotrzebowanie w sklepie |
| S1 | 50 | 70 | 35 | 100 | 500 |
| S2 | 60 | 30 | 20 | 45 | 100 |
| S3 | 70 | 55 | 75 | 80 | 300 |
| S4 | 100 | 130 | 150 | 110 | 1000 |
| S5 | 75 | 50 | 60 | 85 | 200 |
| Zapas w magazynie | 300 | 700 | 600 | 500 | - |

Zadanie 2.1.19. Odlewnia pomników ma zamówienie na wykonanie pomnika ze specjalnego stopu, który ma zawierać nie mniej niż 14% C, nie więcej niż 6% Mn, nie więcej niż 5% S i nie mniej niż 23% Sn. Odlewnia może zamówić trzy stopy sprzedawane w odlewach. Zminimalizować koszt materiału potrzebnego na odlanie pomnika, który ma ważyć 1 tonę, jeżeli proces technologiczny produkcji stopu polegać ma na stopieniu dostarczonych odlewów. W tabeli podano procentowe zawartości pierwiastków w poszczególnych stopach, ceny odlewów i ich masę

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Pierwiastek  Stop | C | Mn | S | Sn | Cena odlewu | Masa odlewu kg |
| I | 19 | 5 | 7 | 29 | 55 | 75 |
| II | 22 | 2 | 6 | 40 | 50 | 60 |
| III | 15 | 3 | 3 | 20 | 60 | 100 |

Zadanie 2.1.20. Zakład ‘RURA’ ma wyprodukować 100 rur o długości 5,5 m i 150 o długości 7,5 m. Zakład ma do dyspozycji rury o długości 17 m. Jak należy pociąć rury, aby odpad był najmniejszy? Pozostałe rury długości 5,5 i 7,5 stanowią odpad. Zapisz odpowiedni program liniowy.

Zadanie 2.1.21. Zakład dysponuje czterema typami koparek oraz ma wykonać usługi polegające na wykopaniu odpowiednich rowów. Tabela podaje liczby odpowiednich typów koparek w zakładzie, ich wydajności przy poszczególnych pracach, koszty eksploatacji oraz minimalne ilości m3.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Wydajność m3 / dzień | | | Liczba koparek | Koszty |
| Koparka | Rów 1 | Rów 2 | Rów 3 | w zakładzie | eksploatacji |
| A | 17 | 20 | 5 | 12 | 16 |
| B | 9 | 4 | 20 | 5 | 7 |
| C | 19 | 16 | 9 | 10 | 20 |
| D | 15 | 17 | 12 | 8 | 15 |
| Minimalna dzienna wydajność m3 | 200 | 190 | 170 |  |  |

Zapisać program liniowy wyznaczający przydział koparek do prac minimalizujący koszty prac.

Zadanie 2.1.22. Fabryka produkująca fortepiany i pianina ma w ciągu 90 dni wykonać

13 fortepianów, 20 pianin ‘Pianola’, 25 pianin ‘Elita’. W fabryce znajduję się 4 brygady potrafiące wykonywać te instrumenty. Brygady różnią się pod względem wydajności i kosztów wytwarzania. Rozdzielić prace pomiędzy brygady w taki sposób, aby zrealizować zadanie w terminie i po jak najmniejszych kosztach.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Brygada | Czas produkcji jednej sztuki w dniach | | | Koszty produkcji jednej sztuki | | |
|  | Fortepian | Pianola | Elita | Fortepian | Pianola | Elita |
| 1 | 9 | 5 | 2 | 550 | 425 | 480 |
| 2 | 7 | 6 | 4 | 570 | 420 | 485 |
| 3 | 8 | 7 | 2 | 440 | 430 | 470 |
| 4 | 8 | 5 | 3 | 560 | 420 | 490 |

Zadanie 2.1.23. Przedsiębiorstwo przewozowe ‘ Świeża rybka ‘ zajmuje się dostarczaniem śledzi solonych do sklepów. Dane dotyczące kosztów przewozu kubełka śledzi z magazynu do sklepu oraz wielkości zapasów i zapotrzebowania ( w kubełkach) zamieszczono w tabeli. Określić plan przewozu minimalizujący koszty.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Magazyn  Sklep | M1 | M2 | M3 | M4 | Zapotrzebowanie w sklepie |
| S1 | 50 | 70 | 35 | 100 | 50 |
| S2 | 60 | 30 | 20 | 45 | 30 |
| S3 | 70 | 55 | 75 | 80 | 40 |
| S4 | 100 | 130 | 150 | 110 | 100 |
| S5 | 75 | 50 | 60 | 85 | 30 |
| Zapas w magazynie | 30 | 70 | 60 | 50 | - |

Zadanie 2.1.24. Zakład otworzył nowy oddział, na którym zainstalowano dwie nowoczesne obrabiarki. Na każdej z nich można wykonywać kilka różnych prac. Zakład produkuje wirniki do silników różnych typów. Postanowiono, że na nowym oddziale będą produkowane tylko trzy typy wirników. Zakład pracuje 8 godzin i obrabiarki mogą pracować przez całą zmianę bez potrzeby zatrzymywania się. Czasy jednostkowe produkcji , jednostkowe koszty produkcji, cenę zbytu oraz wielkości zamówień podaje tabela. Jak rozdzielić pracę pomiędzy obrabiarki aby maksymalizować zysk zakładu jeśli zakłada się, że zamówienia mają zostać zrealizowane w ciągu jednej zmiany?

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Obrabiarka | Zużycie czasu pracy w min.  na jedną sztukę | | | Jednostkowy koszt produkcji  jednego wirnika | | |
|  | T1 | T2 | T3 | T1 | T2 | T3 |
| 1 | 6 | 8 | 11 | 10 | 15 | 20 |
| 2 | 13 | 16 | 20 | 8 | 12 | 17 |
| Zamówienie | 35 | 30 | 15 | - | - | - |
| Cena 1 szt. | 50 | 60 | 70 | - | - | - |

Zadanie 2.1.25. Krawcowa z dostarczanych odpadków materiału szyje ubranka dla lalek. Są dwa rodzaje odpadków i w zależności od ich typu można z nich uszyć różne ubranka . Krawcowa dostała zlecenie na uszycie większej liczby ubranek, które ma dostarczyć w kompletach. Jak należy ustalić produkcję, aby ogólna liczba wykorzystanych odpadów materiału była najmniejsza?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Odpad | Typ ubranka | | | Zapas odpadu  u krawcowej |
| ADA | ALA | OLA |
| 1 | 4 | 3 | 12 | 37 |
| 9 | 10 | 0 |  |
| 2 | 8 | 1 | 6 | 32 |
| 3 | 14 | 1 |  |
| Komplet |  |  |  | Zamówienie szt. |
| Mini 1 | 1 | 3 | 2 | 50 |
| Mini 2 | 1 | 2 | 2 | 70 |
| MAX | 3 | 2 | 4 | 60 |

Zadanie 2.1.26. Tartak produkuje altanki mając do dyspozycji dwa rodzaje bali, z których może wycinać deski na altanki. W tabeli podano wszystkie możliwe sposoby cięcia bali i ich zapasy. Należy tak ustawić produkcję, aby wytworzyć jak największą liczbę altanek.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Bal i sposoby | Rodzaj deski | | | Zapas bali  w tartaku |
| jego cięcia | A | B | C |
| 1/1 | 7 | 69 | 1 | 200 |
| 1/2 | 2 | 64 | 6 |
| 2/1 | 7 | 61 | 5 | 310 |
| 2/2 | 5 | 60 | 8 |
| 2/3 | 3 | 66 | 2 |
| Liczba desek potrzebna na altankę | 12 | 200 | 10 |  |

Zadanie 2.1.27. Zakład posiada 4 oddziały na których obecnie można produkować trzy typy elementów A, B, C. Dyrektor zakładu postanowił, że na oddziałach będzie wprowadzona specjalizacja to znaczy każdy oddział będzie produkował tylko jeden typ elementów, a każdy typ elementu może być produkowany na jednym oddziale. Dane dotyczące obecnych zdolności produkcyjnych przedstawia tabela. Zakład posiada kontrakt, który musi wypełnić i należy wyprodukować odpowiednie ilości elementów A, B, C. Należy przedstawić najlepszy plan specjalizacji oddziałów, mający na celu realizację zamówienia oraz maksymalizację ogólnej ilości wytworzonych sztuk.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Element  Oddział | A | B | C |
| 1 | 150 | 120 | 145 |
| 2 | 160 | 150 | 130 |
| 3 | 140 | 170 | 120 |
| 4 | 150 | 160 | 150 |
| Zamówienie. | 145 | 140 | 130 |

Uwaga. Przez zdolności produkcyjne rozumie się maksymalną liczbę sztuk wyrobów produkowanych w jednostce czasu w przypadku gdy oddział produkuje tylko ten wyrób.

Zadanie 2.1.28. Zakład krawiecki posiada 3 oddziały, na których może szyć trzy rodzaje garniturów: klasyczny, sportowy i elegancki. Wyposażenie oddziałów sprawia, że koszt produkcji i jej czas są zróżnicowane dla poszczególnych oddziałów. Jak należy rozdzielić produkcję na poszczególne oddziały, aby koszty jej były jak najmniejsze oraz zostały zrealizowane tygodniowe zamówienia.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Oddział | Zdolności produkcyjne oddziału  w sztukach na tydzień | | | Jednostkowe koszty produkcji | | |
|  | Klasyczny | Sportowy | Elegancki | Klasyczny | Sportowy | Elegancki |
| Mały | 130 | 100 | 45 | 60 | 70 | 70 |
| Średni | 140 | 120 | 50 | 55 | 65 | 85 |
| Duży | 150 | 140 | 55 | 50 | 60 | 90 |
| Zamówienia | 100 | 150 | 50 | - | - | - |

Uwaga. Przez zdolności produkcyjne rozumie się maksymalną liczbę garniturów, które oddział może wyprodukować w ciągu tygodnia w przypadku gdy będzie produkował tylko tego typu garnitury.

Zadanie 2.1.29. Przedsiębiorstwo ‘KOLOPEX’ zamierza przejąć 60 nowych pracowników z przedsiębiorstwa ‘MAPS-PEX’. Dotychczas ‘KOLOPEX’ zatrudniał 140 pracowników, struktura zatrudnienia przedstawiała się w sposób następujący: średni staż 15 lat, średnie doświadczenie 12 punktów. Dane dotyczące struktury zatrudnienia ‘MAPS-PEX’ – u przedstawiono w tabeli.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Staż pracowników  Lata | Doświadczenie  Punkty | Liczba pracowników |
| 5 | 8 | 20 |
| 10 | 10 | 25 |
| 15 | 14 | 30 |
| 20 | 16 | 20 |

Zapisać zagadnienie optymalnego zatrudnienia, jeżeli należy maksymalizować średnie doświadczenie pracowników gdy staż pracy nowej załogi nie może się zmienić o więcej niż 10%.

Zadanie 2.1.30. Dla zwiększenia produkcji firma ‘DACH-TEX’ zamierza zatrudnić nowych pracowników. Szacuje się, że potrzeba od 30 do 75 nowych pracowników. Zatrudnienie doświadczonego pracownika związane jest z dodatkowymi kosztami, które musi ponieść firma na podkupienie pracownika z konkurencyjnej firmy. Nowy pracownik jest o wiele tańszy. Obecnie zatrudnionych jest 150 pracowników , średni wiek pracowników wynosi 38 lat a średnie doświadczenie 20 pkt. Na ogłoszenie zgłosiło się 200 chętnych do pracy. Dane o nich zestawiono w tabeli. Zapisać program liniowy mający za zadanie minimalizację kosztów ponoszonych przy zatrudnianiu nowych pracowników i uwzględniający następujące warunki: średni wiek ma pozostać na poziomie 32 – 40 lat, średnie doświadczenie nie może się zmienić o więcej niż 15%.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Wiek pracownika | Ilość pracowników | Doświadczenie | Koszty zatrudnienia |
| 20 | 50 | 10 | 5 |
| 25 | 50 | 12 | 10 |
| 30 | 40 | 15 | 12 |
| 35 | 25 | 18 | 15 |
| 40 | 25 | 22 | 25 |
| 45 | 10 | 25 | 35 |

Zadanie 2.1.31. Przedsiębiorstwo przewozowe ‘ Lśniący bucik ‘ zajmuje się dostarczaniem butów do sklepów. Dane dotyczące kosztów przewozu jednej pary butów z magazynu do sklepu oraz wielkości zapasów i zapotrzebowania zamieszczono w tabeli. określić plan przewozu minimalizujący koszty.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Magazyn  Sklep | M1 | M2 | M3 | M4 | Zapotrzebowanie w sklepie |
| S1 | 50 | 70 | 35 | 100 | 500 |
| S2 | 60 | 30 | 20 | 45 | 100 |
| S3 | 70 | 55 | 75 | 80 | 300 |
| S4 | 100 | 130 | 150 | 110 | 400 |
| S5 | 75 | 50 | 60 | 85 | 200 |
| Zapas w magazynie | 300 | 700 | 600 | 500 | - |

Zadanie 2.1.32. Należy podjąć decyzję o zamknięciu jednego z 4 oddziałów mając na uwadze największy zysk przedsiębiorstwa. Dane dotyczące oddziałów przedstawia tabela.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Oddział  Dane | A | B | C | D |
| Ilość pracowników | 150 | 200 | 250 | 800 |
| Koszt utrzymania 1 pracownika | 10 | 15 | 12 | 14 |
| Średni poziom kwalifikacji | 5 | 13 | 10 | 8 |
| Średni wiek pracownika | 35 | 28 | 43 | 27 |
| Wartość produkcji 1 pracownika | 15 | 21 | 19 | 13 |

Ponadto założono, że po zamknięciu w przedsiębiorstwie poniższe wielkości mają kształtować się następująco:

1. Średnie koszty utrzymania pracownika nie mogą być większe niż 12,5.
2. Średnia wartość produkcji jednego pracownika nie może być mniejsza niż 18.
3. Średnie kwalifikacje nie mniejsze niż 8
4. Średni wiek nie większy niż 35.

Napisać program liniowy, który pozwoli rozwiązać problem zamknięcia oddziału.

Zadanie 2.1.33. Sześć przedsiębiorstw postanowiło zawiązać konsorcjum. Na zebraniu prezesów rad nadzorczych ustalono kryteria zawiązania i przystępowania przedsiębiorstw do konsorcjum. Po burzliwych debatach ustalono następujące kryteria:

1. Średnie kwalifikacje pracowników konsorcjum powinny być na poziomie nie mniejszym niż 25.
2. Średni wiek pracowników powinien zawierać się pomiędzy 25 a 38 lat.
3. Średnia wartość produkcji jednego pracownika nie powinna być mniejsza niż 152.
4. Średnie koszty utrzymania jednego pracownika nie powinny być większe niż 93.

Dane przedstawiają wyniki przedsiębiorstw w badanym okresie.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Przedsiębiorstwo | Ilość zatrudnianych pracowników | Średnie kwalifikacje | Średni wiek pracowników | Średnia wartość produkcji | Średnie koszty utrzymania |
| A | 152 | 50 | 50 | 175 | 100 |
| B | 250 | 75 | 45 | 150 | 98 |
| C | 350 | 38 | 30 | 160 | 110 |
| D | 150 | 15 | 22 | 130 | 73 |
| E | 268 | 22 | 35 | 155 | 90 |
| F | 458 | 20 | 25 | 150 | 120 |

Napisać program liniowy, którego rozwiązaniem jest maksymalna liczba przedsiębiorstw, które mogą zawiązać konsorcjum.

Zadanie 2.1.34. Fabryka mebli wytwarza dwa rodzaje szaf, dwa rodzaje regałów i jeden typ barku. Następnie składa je w trzy komplety mebli: Agata, Beata, Cecylia.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Szafa 1 | Szafa 2 | Regał 1 | Regał 2 | Barek 1 |
| Agata | 1 |  |  | 1 | 1 |
| Beata | 1 |  | 1 |  | 1 |
| Cecylia |  | 1 | 1 |  | 1 |

Fabryka posiada dwa zakłady produkujące poszczególne elementy i dwa sklepy firmowe. W sklepach ogółem złożono zamówienia na 30 zestawów Agata, 35 zestawów Beata i 25 zestawów Cecylia

( w sklepie pierwszym odpowiednio 20, 15, 15 ). Tabele przedstawiają zdolności produkcyjne poszczególnych zakładów koszty wytworzenie jednego elementu oraz ceny transportu poszczególnych elementów do poszczególnych sklepów.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Zakład 1 produkcja | Koszt | Zdolności produkcyjne | Koszt transportu do sklepu 1 | Koszt transportu do sklepu 2 |
| Szafa 1 | 50 | 150 | 30 | 20 |
| Szafa 2 | 60 | 120 | 22 | 17 |
| Regał 2 | 90 | 140 | 27 | 25 |
| Barek | 65 | 130 | 16 | 12 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Zakład 2 produkcja | Koszt | Zdolności produkcyjne | Koszt transportu do sklepu 1 | Koszt transportu do sklepu 2 |
| Szafa 1 | 75 | 150 | 20 | 27 |
| Regał 1 | 55 | 200 | 25 | 33 |
| Regał 2 | 80 | 70 | 35 | 40 |
| Barek | 60 | 150 | 10 | 15 |

Ustalić plan produkcji minimalizujący koszty produkcji oraz transportu.

Zadanie 2.1.35. Podjąć decyzję o zwolnieniu pracowników w fabryce. Strukturę zatrudnienia przedstawia tabela.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| wiek pracownika | ilość pracowników w danej grupie | średni wiek pracownika w danej grupie wiekowej | średnie doświadczenie pracownika w danej grupie  ( od 0 do 10 ) | średnie koszty utrzymania 1 pracownika danej grupy | średni przychód od jednego pracownika danej grupy |
| starsi | 80 | 52 | 9 | 15 | 25 |
| średni | 120 | 36 | 6.5 | 13 | 20 |
| młodzi | 60 | 25 | 3 | 10 | 15 |

Założono dodatkowo, że:

1. nie można zwolnić więcej niż 15 % wszystkich pracowników.
2. średni wiek pracowników nie powinien się zmienić o więcej niż 10%.
3. średnie doświadczenie pracowników nie powinno być mniejsze niż 6.5.

Jako jedyne kryterium postanowiono zastosować kryterium zysku przedsiębiorstwa.

Zadanie 2.1.36. Fabryka rowerów ma cztery zakłady, w których wytwarzane są trzy rodzaje rowerów. Nowe kierownictwo podjęło decyzję o specjalizacji zakładów. Dokonać podziału mając na uwadze maksymalny zysk zakładu ze sprzedaży wytworzonych rowerów przyjmując, że praca na zmianie trwa 450 minut.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Czas produkcji jednego roweru na zmianie [ min ]. | | |
| Zakład | Składak | Górski | Turystyczny |
| 1 | 20 | 38 | 25 |
| 2 | 25 | 42 | 28 |
| 3 | 30 | 35 | 32 |
| 4 | 19 | 21 | 25 |
| Cena zbytu | 400 | 600 | 500 |

Zadanie 2.1.37. Fabryka mebli dostała zamówienie na wykonanie 20 tapczanów, 10 sof , 14 kanap i 30 leżanek. Do realizacji tego zadanie wyznaczono 4 brygady. Mając podane nakłady czasu na wykonanie jednego mebla przez brygadę należy tak rozdzielić pracę tak, aby czas jej wykonania był jak najkrótszy.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Brygada | Tapczan | Sofa | Kanapa | Leżanka |
| 1 | 25 | 50 | 38 | 16 |
| 2 | 26 | 48 | 35 | 15 |
| 3 | 24 | 47 | 33 | 14 |
| 4 | 25 | 52 | 34 | 18 |

Zadanie 2.1.38. Rolnik ze wsi Bystra Wola ma do dyspozycji 5 ha ziemi i 600 godzin wolnego czasu. Chcąc poprawić swój budżet udał się do punktu konsultacyjnego. Prześliczna pani w okienku podała rolnikowi zestawienie proponowanych upraw oraz poinformowała rolnika z uśmiechem, że jest to jej pierwszy dzień pracy i więcej informacji mu nie może udzielić. Rolnik z otrzymaną kartką przyjechał do domu i stwierdził, że z proponowanych 6 upraw wybrać może tylko, co najwyżej 4, a jego wymagająca żona stwierdziła, że dla bezpieczeństwa powinien uprawiać, co najmniej dwie.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Uprawa | Powierzchnia potrzebna do uprawy [ ha ] | Ilość godzin potrzebnych do uprawy | Wydajność z  1 ha w q | Cena jednego q w skupie | Wskaźnik *NZ* nakłady pracy do zysku na  1 ha zasiewu |
| A | 1,7 | 70 | 15 | 30 | 34% |
| B | 1,8 | 135 | 24 | 26 | 45% |
| C | 2,2 | 154 | 39 | 32 | 20% |
| D | 1,3 | 160 | 12 | 50 | 76% |
| E | 3 | 95 | 23 | 20 | 51% |
| F | 0,5 | 250 | 17 | 39 | 80% |
| G | 0,9 | 199 | 27 | 14 | 20% |

Napisać program liniowy mający na celu otrzymanie jak największej ilości gotówki po sprzedaniu zbiorów oraz zapewniający średni poziom wskaźnika *NZ* z wybranych upraw na poziomie, co najwyżej 50%.

Zadanie 2.1.39. Korporacja ‘ZBO ‘ składa się z trzech przedsiębiorstw, dwa z nich to zakłady produkcyjne, trzecim jest wyspecjalizowana montownia. Zakład pierwszy specjalizuje się w produkcji kapsuł, pojemników i kontenerów. Tabela 1 podaje zdolności produkcyjne na każdy z produktów, koszty wytworzenia, oraz cenę sprzedaży elementów oraz minimalną produkcję przeznaczoną do sprzedaży poza kompletami. Zakład drugi wytwarza specjalistyczne podstawki i opakowania. Tabela 2. podaje parametry produkcji, które należy uwzględnić w modelu matematycznym. W montowni składa się w komplety produkowane elementy. Warunki produkcji i sprzedaży podaje Tabela 3.

Tabela 1.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Cena sprzedaży | Minimalna produkcja | Koszty wytworzenia | Zdolności produkcyjne |
| Kapsuła | 15 | 5 | 5 | 100 |
| Pojemnik | 22 | 10 | 7 | 120 |
| Kontener | 30 | 15 | 12 | 150 |

Tabela 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Cena sprzedaży | Minimalna produkcja | Koszty wytworzenia | Zdolności produkcyjne |
| Podstawka 1 | 10 | 3 | 3 | 200 |
| Podstawka 2 | 12 | 4 | 4 | 250 |
| Opakowanie | 15 | 4 | 4 | 220 |

Tabela 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Cena | Elementy składowe kompletu | | | |
| Komplet | Kapsuła | Kontener | Podstawka 1 | Opakowanie |
| Ola 1 | 120 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| Ola 2 | 135 | 1 | 1 | 1 | 2 |

Jak należy ustalić produkcję w trzech zakładach dla osiągnięcia największego zysku?

Zadanie 2.1.40. Rozdzielić produkcję trzech detali 1, 2, 3 pomiędzy dwa typy tokarek tak, aby maksymalizować liczbę kompletów wytwarzanych w ciągu dnia. Na jeden komplet składają się detale w proporcjach 2:3:1. Dzienna wydajność każdej z maszyn w zależności od poszczególnych detali podana jest w tabeli. Detale 1, 2, 3 produkowane są w całości na jednej z obrabiarek, wykończenie ich przebiega na automacie. Zapisać program liniowy dla powyższego zagadnienia.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Obrabiarki | Wydajność maszyn w detalach na dzień | | |
| 1 | 2 | 3 |
| Tokarka I | 65 | 45 | 15 |
| Tokarka II | 78 | 15 | 15 |
| Automat | 150 | 56 | 154 |

Zadanie 2.1.41. Dla wytworzenia trzech dużych maskotek A, B, C fabryka zużywa pewne ilości pluszu i kolorowych materiałów. Zasoby materiałów, siły roboczej, zużycie materiałów na maskotkę w metrach oraz liczbę wyprodukowanych maskotek w ciągu godziny podaje tabela.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Rozmiar zasobów | Maskotka | | |
| A | B | C |
| Plusz | 125 m | 2 | 3 | 4 |
| Materiał kolorowy | 252 m | 2 | 6 | 5 |
| Siła robocza | 1540 h | 5 | 2 | 10 |
| Zysk |  | 300 | 450 | 660 |

Wyznaczyć plan produkcji maksymalizujący zysk, sformułować program liniowy.

Zadanie 2.1.42. Firma ‘SOHO’ zajmuje się składaniem komputerów i dostarczaniem ich do sklepów. Firma posiada dwie montownie, w których można zmontować 150 i 400 komputerów w ciągu miesiąca. Dzięki dobrej pozycji na rynku firma nawiązała współpracę z trzema sklepami A, B, C, do których dostarcza komputery. W przeciągu najbliższego miesiąca sklepy zamówią odpowiednio 180, 200, 150 komputerów. Ponieważ komputery dowożone są po telefonie ze sklepu przyjmuje się, że koszty jednostkowe transportu komputera wynoszą z montowni mniejszej odpowiednio 50 zł, 35 zł i 25 zł. Jednostkowe koszty transportu z większej montowni wynoszą: 75 zł, 55 zł i 60 zł. Firma kupuje części w dwóch różnych hurtowniach. Znaczące różnice cen dotyczą dysków twardych, procesorów i płyt głównych, nie bez znaczenia jest również producent sprzętu (ze względu na wadliwość elementów). Dewizą firmy jest w przypadku stwierdzenia wadliwości elementu natychmiastowa wymiana go na nowy, co niewątpliwie ma znaczący wpływ na koszty. Obecnie w hurtowniach znajdują się następujące oferty dotyczące sprzętu. Firma dokonuje zakupu raz w miesiącu, wtedy udzielany jest jej znaczny rabat.

Hurtownia MAXMIN:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| LP | Nazwa towaru | Producent | Cena zł | Ilość szt. |
| 1 | Procesor | Chiny | 590 | 450 |
| 2 | Płyta główna | Chiny | 450 | 120 |
| 3 | Dysk twardy | Tajwan | 850 | 200 |

Hurtownia MINMAX:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| LP | Nazwa towaru | Producent | Cena zł | Ilość szt. |
| 1 | Procesor | Tajwan | 610 | 350 |
| 2 | Płyta główna | Chiny | 490 | 550 |
| 3 | Dysk twardy | Tajwan | 870 | 350 |

Dotychczasowe doświadczenia dotyczące wadliwości oferowanych części pozwalają na stwierdzenie, że 5% produkcji z Chin jest wadliwa, natomiast elementy pochodzące z Tajwanu charakteryzują się 10% wadliwością. Firma stara się o kontrakt rządowy, który będzie korzystny dla firmy, jeżeli koszty ponoszone przez nią wyniosą 75% wartości sprzedaży. Wyliczono, że firma sprzedaje komputery do sklepów, po odliczeniu wartości pozostałych elementów za cenę 2000 zł.

Zapisać program liniowy pomocny w podjęciu decyzji dotyczącej dalszych starań o kontrakt, na podstawie doświadczeń z zaopatrywaniem sklepów.

Zadanie 2.1.43. Przydzielić 3 maszyny do proponowanej przez firmę ‘Ma-XXXIII’ produkcji czterech elementów A, B, C, D. Tabela podaje czas produkcji każdego elementu (w rozbiciu na maszyny) na zmianę ( 8 godzin), koszty produkcji elementów przez poszczególne maszyny, ceny sprzedaży. Zapisać program liniowy realizujący zagadnienie przedziału zapewniający jak największy zysk, przy założeniu, że żaden element nie jest produkowany na dwóch maszynach, element nieukończony na zmianie ulega zniszczeniu. Maszyny mogą pracować bez przerwy całą zmianę

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Maszyna | Czas produkcji elementu w minutach | | | | Koszt produkcji elementu w zł | | | |
| A | B | C | D | A | B | C | D |
| M1 | 15 | 27 | 15 | 14 | 14 | 15 | 24 | 16 |
| M2 | 25 | 36 | 14 | 15 | 17 | 19 | 14 | 13 |
| M3 | 14 | 12 | 15 | 48 | 14 | 15 | 16 | 18 |
|  | Cena sprzedaży elementu w zł. | | | | 25 | 26 | 25 | 23 |

Zadanie 2.1.44. Przedsiębiorstwo wielobranżowe sprzedaje komplety uszczelek. Jeden komplet to 5 dużych uszczelek, 15 średnich i 20 małych, jego cena to 5 zł. W tabeli podano wielkości partii, ceny uzyskiwane u producentów uszczelek oraz liczbę partii uszczelek, które można zakupić u producentów. Zapisz program liniowy maksymalizujący zysk przedsiębiorstwa.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Producent | Ilość uszczelek w partii | | | Cena partii w zł. | Liczba partii w zapasie |
| Duże | Średnie | Małe |
| GUMPOL | 1500 | 2500 | 10000 | 4500 | 20 |
| 1000 | 1000 | 5000 | 2500 | 15 |
| POLGUM | 0 | 5000 | 25000 | 7500 | 10 |
| 0 | 3500 | 15000 | 6000 | 15 |

Zadanie 2.1.45. Zakład produkuje 4 rodzaje opon. Do ich wytworzenia potrzeba użyć czterech maszyn, każda z nich wykonuje inną czynność. Tabela podaje maksymalny czas pracy maszyny na 3 zmianach. Oraz minimalne ilości opon do wyprodukowania podczas zmiany. Jak ustalić produkcję, aby wytworzyć maksymalną liczbę opon?

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Zużycie czasu pracy w [szt/h] | | | |  |
| Opona  Maszyna | Zima | Sporting | HighLife | Super CX | Czas pracy maszyny  [ min] |
| M1 | 5 | 10 | 1 | 15 | 1360 |
| M2 | 6 | 5 | 2 | 2 | 1300 |
| M3 | 5 | 2 | 2 | 7 | 1400 |
| M4 | 1 | 1 | 21 | 6 | 1420 |
| Minimalne zamówienie | 10 | 20 | 3 | 5 |  |

Zadanie 2.1.46. Zakład produkuje 4 rodzaje opon. Do ich wytworzenia można używać zamiennie czterech maszyn. Jedna opona produkowana jest tylko na jednej maszynie. Tabela podaje maksymalny czas pracy maszyn na 3 zmianach oraz minimalne ilości opon, które mają być wyprodukowane podczas zmiany. Jak ustalić produkcję, aby wytworzyć maksymalną liczbę opon?

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Zużycie czasu pracy w [szt/h] | | | |  |
| Opona  Maszyna | Zima | Sporting | HighLife | Super CX | Czas pracy maszyny  [ min] |
| M1 | 5 | 10 | 1 | 15 | 1360 |
| M2 | 6 | 5 | 2 | 2 | 1300 |
| M3 | 5 | 2 | 2 | 7 | 1400 |
| M4 | 1 | 1 | 21 | 6 | 1420 |
| Minimalne zamówienie | 10 | 20 | 3 | 5 |  |

Zadanie 2.1.47. Tartak produkuje wiaty na przystanki autobusowe. Do produkcji jednego przystanku zużywa się 3 deski typu A, 7 desek typu B i 12 desek typu C. Deski te dostaje się tnąc dwa rodzaje bali dużych i małych odpowiednimi sposobami ( tabelka ). W magazynie jest 200 bali dużych i 500 małych. Jaką największą liczbę przystanków jest w stanie wyprodukować tartak?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Ilość desek otrzymanych z bali ciętych odpowiednimi sposobami. | | |
|  | A | B | C |
| duże I | 12 | 2 | 15 |
| duże II | 2 | 20 | 10 |
| małe I | 1 | 1 | 15 |
| małe II | 2 | 3 | 10 |
| małe III | 5 | 0 | 2 |

Zadanie 2.1.48. Zakład otworzył nowy oddział, na którym zainstalowano dwie nowoczesne obrabiarki. Na każdej z nich można wykonywać kilka różnych prac. Zakład produkuje elementy do rakiet różnych typów. Postanowiono, że na nowym oddziale będą produkowane tylko trzy typy. Zakład pracuje 8 godzin i obrabiarki mogą pracować przez całą zmianę bez potrzeby zatrzymywania się. Zdolności produkcyjne, koszty wytworzenia, cenę zbytu oraz minimalne wielkości zamówień podaje tabela.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Obrabiarka | Ilość sztuk produkowanych  w czasie 30 minut | | | Jednostkowy koszt produkcji  jednego elementu | | |
|  | E1 | E2 | E3 | E1 | E2 | E3 |
| 1 | 16 | 18 | 11 | 10 | 15 | 20 |
| 2 | 13 | 16 | 20 | 8 | 12 | 17 |
| Minimalne zamówienie | 35 | 30 | 15 | - | - | - |
| Cena 1 szt. | 150 | 160 | 170 | - | - | - |

Zadanie 2.1.49. Rafineria sprowadza ropę naftową R1, R2 z dwóch źródeł różniących się między sobą jakością i ceną. Produkcję rafinerii stanowią dwa rodzaje benzyn E98 i E94 oraz olej opałowy. Ile trzeba kupić ropy R1 a ile R2, aby móc otrzymać co najmniej 120 000 l E94, co najmniej 500 000 l E98 oraz 300 000 l oleju opałowego starając się minimalizować koszty zakupu?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Ropa | Ilość litrów uzyskiwanych produktów  z jednej tony ropy | | | Cena  jednej tony |
|  | E98 | E94 | OP | ropy |
| R1 | 100 | 90 | 250 | 550 |
| R2 | 150 | 130 | 200 | 750 |

Zadanie 2.1.50. Huta dostała zamówienie na wyprodukowanie 100 ton ściśle określonej stali. Stal ta zawierać ma 0.62-0.70% C, 0.50-0.80% Mn, 0.17-0.37% Si. Huta ma w swoich magazynach zalegające trzy rodzaje stali o procentowych zawartościach pierwiastków podanych w tabeli. Czy można z posiadanych zasobów wykonać zamówienie, jeżeli tak, to jakie ilości odpowiednich stali należy ze sobą stopić, aby łączna masa zużytych stali była najmniejsza?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Pierwiastek  Stal | C | Mn | Si | Zasoby stali w magazynie. |
| Stal A | 0.5 | 0.6 | 0.05 | 45 |
| Stal B | 0.8 | 0.3 | 0.4 | 40 |
| Stal C | 0.4 | 0.4 | 0.15 | 35 |

Zadanie 2.1.51. Dokonać rozdziału produkcji 4 elementów na 4 maszyny tak, aby każda maszyna wykonywała dokładnie jeden typ elementów, a każdy typ elementu wykonywany był tylko przez jedną maszynę. W tabeli podano czas wykonywania jednego elementu przez odpowiednią maszynę

( min / szt. ) oraz maksymalny czas pracy maszyny na zmianie. Dokonać podziału czynności tak, aby wykonać jak najwięcej elementów w ciągu jednej zmiany.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Element  Maszyna | 1 | 2 | 3 | 4 | Czas pracy maszyny |
| 1 | 9 | 10 | 12 | 15 | 400 |
| 2 | 8 | 9 | 13 | 13 | 420 |
| 3 | 7 | 8 | 12 | 14 | 380 |
| 4 | 9 | 9 | 14 | 16 | 360 |

Zadanie2.1.52. Zakład produkuje łyżki i widelce. Podczas ich produkcji można użyć zamiennie maszyn M1 , M2, M3, których czas pracy jest limitowany. Dane liczbowe zawiera tabela. Z maszyny schodzi gotowy produkt.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Maszyna | Ilość sztuk w ciągu [ h ] | | | | | Limit czasowy |
|  | łyżka 1  [ szt./h ] | łyżka 2  [ szt./h ] | łyżka 3  [ szt./h ] | widelec 1  [ szt.\h ] | widelec 2  [ szt.\h ] | maszyny  [ h ] |
| M1 | 4 | 5 | 1 | 8 | 9 | 560 |
| M2 | 8 | 9 | 3 | 12 | 13 | 600 |
| M3 | 15 | 12 | 2 | 10 | 12 | 700 |
| Cena | 11 | 15 | 50 | 11 | 9 |  |

Ustalić rozmiary produkcji przy założeniu, że wartość sprzedaży ma być maksymalna przy założeniu, że trzeba wyprodukować co najmniej po 100 sztuk każdego z wyrobów.

Zadanie 2.1.53. Rolnik ma trzy pola, które różnią się wielkością oraz klasą gleby; 100 ha klasy I,

150 ha klasy II i 300 ha klasy IV. Trzon jego produkcji rolnej tworzą ziemniaki, pszenica i kukurydza. Średnie zbiory z 1 ha wynoszą: 45q pszenicy, 200q ziemniaków, 45q kukurydzy z hektara. Zbiory mogą być większe lub mniejsze w zależności od klasy gruntu użytego pod uprawę. Przewiduje się, że ceny na poszczególne produkty będą następujące 100, 20, 75 j.p.. Rolnik zobowiązał się dostarczyć co najmniej 140q pszenicy, 150q ziemniaków, 160q kukurydzy. Tabela zawiera wzrost lub obniżkę plonów w q z ha w zależności od klasy gleby użytej pod uprawę.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Zmiana wydajności %  Klasa ziemi | Pszenica | Ziemniaki | kukurydza |
| I | 10 | 5 | 15 |
| II | -10 | 0 | 5 |
| IV | -30 | -10 | -25 |

Ustalić plan zasiewów mający na uwadze maksymalizacją zysków rolnika i dotrzymanie zobowiązań.

Zadanie 2.1.54. Z hurtowni należy dostarczyć towar do sklepów. Ilości towarów w hurtowniach i zapotrzebowanie w sklepach oraz koszty transportu jednostki towaru podaje tabela. W jaki sposób należy dostarczyć towary do sklepów, aby koszty transportu były jak najniższe.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hurtownia  Sklep | A | B | C | D | Zapotrzebowanie  W sklepie |
| 1 | 10 | 15 | 13 | 14 | 100 |
| 2 | 12 | 14 | 17 | 10 | 150 |
| 3 | 20 | 13 | 18 | 15 | 350 |
| 4 | 11 | 12 | 10 | 16 | 200 |
| Zapas | 150 | 175 | 125 | 350 |  |

Zadanie 2.1.55. Zakład produkuje gumowe uszczelki wykrawając je z większych kawałków. Uszczelki produkuje się w trzech typach i sprzedaje w kompletach 2 duże, 3 średnie i 5 małych. Tabela podaje ilości typów wykrojonych uszczelek przy odpowiednim sposobie cięcia oraz odpad. Sformułować program liniowy zapewniający minimalny odpad jeśli zakład ma zamówienie na 300 kompletów uszczelek.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| sposób cięcia  typ uszczelki | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Duża | 5 | 3 | 1 | 0 | 4 |
| Średnia | 2 | 20 | 2 | 9 | 3 |
| Mała | 0 | 5 | 30 | 15 | 12 |
| odpad cm2 | 3 | 2 | 4 | 6 | 8 |

Zadanie 2.1.56. Dieta młodego goryla powinna zawierać składniki A, B, C, D. Składniki dostarczane są w podstawowych produktach: bananach i pomarańczy, jabłkach, sałacie, kukurydzy. Dane dotyczące zawartości 100 mg składnika w kilogramie produktu oraz minimalną i maksymalną dawkę zawarte są w tabeli.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Składniki | Banany  kg/100mg | Jabłka  kg/100mg | Kukurydz.  kg/100mg | Sałata  kg/100mg | Pom.  kg/100mg | min. dawka  [ mg ] | mak. dawka  [ mg ] |
| A | 6 | 5 | 12 | 1 | 12 | 36000 | 144000 |
| B | 8 | 1 | 10 | 5 | 4 | 32300 | - |
| C | 12 | 7 | 1 | 10 | 4 | 43600 | - |
| D | 5 | 6 | 0 | 12 | 3 | 63000 | 99000 |
| Cena [zł/kg] | 2,50 | 3,75 | 4,00 | 4,95 | 3,00 | - | - |

Ustalić dietę goryla, której koszty będą najmniejsze.

Zadanie 2.1.57. Prawidłowe nawożenie pola powinno zawierać składniki mineralne A, B, C, D. Składniki dostarczane są w produkowanych nawozach dostępnych w paczkach po 50 kg. Dane dotyczące ilości paczek 50 kilogramowych nawozu potrzebnych do dostarczenie 100g składnika mineralnego oraz minimalną i maksymalną dawkę odpowiednich składników potrzebnych do prawidłowego nawożenia pola zawarto w tabeli.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Składniki | Nawóz 1  50 kg/100g | Nawóz 2  50 kg/100g | Nawóz 3  50 kg/100g | Nawóz 4  50kg/100g | Mini.  Dawka  [ 100g ] | mak.  dawka  [ 100g ] |
| A | 6 | 7 | 5 | 12 | 360 | 950 |
| B | 8 | 3 | 7 | 4 | 232 | - |
| C | 12 | 10 | 5 | 4 | 536 | - |
| D | 5 | 12 | 3 | 3 | 430 | 890 |
| Cena [zł/50kg] | 2,50 | 4,50 | 3,50 | 3,00 | - | - |

Ustalić nawożenie, dla którego koszty będą najmniejsze.

Zadanie 2.1.58. Załadować pociąg o wolnej przestrzeni ładunkowej o objętości 5.000 m3 i obciążeniu 5600 tonami towaru. W magazynach znajdują się towary, które można załadować na pociąg. W tabeli przedstawiono dane dotyczące objętości, wagi, ilości, czasu załadunku w minutach oraz zysku z przewiezienia jednostki danego towaru. Pociąg ma wyjechać za 30 godzin, załadunek może odbywać się bez przerwy.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Towar | Ciężar j. w [ t ] | Objętość j. [ m3 ] | Ilość j. w magaz. | Zysk z j. [ $ ] | Czas zał. j. |
| A | 5 | 10 | 300 | 10 | 10 |
| B | 7 | 25 | 200 | 15 | 15 |
| C | 2 | 15 | 100 | 20 | 10 |
| D | 20 | 20 | 10 | 100 | 5 |
| E | 30 | 25 | 5 | 150 | 25 |
| F | 2.5 | 60 | 150 | 35 | 30 |
| G | 13 | 30 | 500 | 30 | 20 |

Wyznaczyć plan załadunku pociągu, który zapewni maksymalny zysk.

Zadanie 2.1.59. Przedsiębiorstwo produkuje wyroby A, B, C, D, E używając do ich produkcji zamiennie czterech maszyn. Maszyny nie mogą pracować dłużej niż określone normy. Wiadomo, że na wytworzenie jednej sztuki wyrobu maszyna potrzebuje określony czas, tabela podaje normy czasowe wykonania poszczególnych wyrobów na kolejnych maszynach w min/szt., ceny zbytu wyrobów oraz maksymalny czas pracy maszyn. Zaplanować produkcję maksymalizując zyski. Koszt wyprodukowania jednej sztuki wyrobu stanowi 75% jego ceny.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Wyrób  Maszyna | A | B | C | D | E | Maks. czas pracy maszyny [min] |
| M1 | 50 | 45 | 60 | 55 | 50 | 500 |
| M2 | 20 | 20 | 30 | 40 | 65 | 400 |
| M3 | 40 | 55 | 45 | 30 | 50 | 500 |
| M4 | 35 | 30 | 65 | 45 | 25 | 600 |
| Cena zbytu | 120 | 150 | 140 | 130 | 155 | - |

Zadanie 2.1.60. Przedsiębiorstwo produkuje wyroby A, B, C, D, E używając do ich produkcji czterech maszyn (wyrób przechodzi przez wszystkie maszyny). Maszyny nie mogą pracować dłużej niż określone normy. Wiadomo, że na wytworzenie jednej sztuki wyrobu maszyna potrzebuje określony czas, tabela podaje wydajności maszyn w szt/min., ceny zbytu wyrobów oraz maksymalny czas pracy maszyn. Zaplanować produkcję maksymalizując zyski. Koszt Zaplanować produkcję maksymalizując zyski.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Wyrób  Maszyna | A | B | C | D | E | maks. czas pracy maszyny [min] |
| M1 | 50 | 45 | 60 | 55 | 45 | 500 |
| M2 | 20 | 20 | 30 | 35 | 60 | 400 |
| M3 | 40 | 55 | 45 | 35 | 20 | 500 |
| M4 | 35 | 30 | 67 | 25 | 50 | 600 |
| Cena zbytu | 120 | 150 | 140 | 150 | 250 | - |

Zadanie 2.1.61. Zakład zagospodarowujący odpady produkuje 3 rodzaje jednorazowych opakowań. W zależności od jakości użytego surowca do produkcji danego opakowania zakład ponosi pewne koszty. Przez najbliższy miesiąc nie będzie więcej dostaw surowca. Dane dotyczące wielkości zasobów surowca w 1000 kg, nakłady na produkcję poszczególnego typu opakowania w miligramach oraz zapotrzebowanie na opakowania podaje tabela. Określić plan produkcji zapewniający zaspokojenie potrzeb rynku oraz minimalizujący nakłady na produkcję.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Opakowanie  Surowiec | I typ | II typ | III typ | Zasoby surowca |
| I klasa | 20 | 50 | 40 | 400 |
| II klasa | 29 | 48 | 31 | 500 |
| III klasa | 34 | 54 | 47 | 600 |
| Zapotrzebowania | 700 | 300 | 200 | - |

Zadanie 2.1.62. Trzech przewoźników stara o obsługę czterech linii transportowych. W składanej przez nich ofercie podano koszty jakie musi ponieść miasto chcąc zapewnić komunikację na danej linii. Dokonać wyboru przewoźnika mając na uwadze minimalizację kosztów ponoszonych przez miasto jeśli każdy przewoźnik może obsługiwać tylko jedną trasę, a każda trasa może być obsługiwana tyko przez jednego przewoźnika. Dane z ofert przedstawia tabela.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Trasa  Przewoźnik | A | B | C | D |
| POLTRANS | 45 | 50 | 60 | 100 |
| TIRPOL | 40 | 50 | 50 | 110 |
| BUS-MAX | 30 | 55 | 70 | 90 |

Zadanie 2.1.63. Zakład krawiecki ma dostarczyć 700 kompletów obrusów. Jeden komplet składa się z dwóch dużych obrusów o wymiarach 2m x 3,5 m i siedmiu o wymiarach 1,5 m x 2 m . Obrusy produkuje się z kawałków materiałów o wymiarach 2 m x 4 m za które płaci 10 jp. Określić sposób pocięcia zapewniający realizację zamówienia oraz minimalizację kosztów.

Zadanie 2.1.64.Spółdzielnia rzemieślnicza produkuje drewniane skrzynie. Sprzedaje je w kompletach 1 duża o wymiarach 1 m x 1 m x 0,5 m i 2 mniejsze 1 m x 0,5 m x 0,5 m. W magazynie znajduje się 150 płyt o wymiarach 2 m x 2 m i 200 o wymiarach 1 m x 1,5 m. Zorganizować produkcję mając na uwadze wyprodukowanie maksymalnej liczby kompletów.

Zadanie 2.1.65. Rolnik posiada 3 pola o powierzchni 100 ha, 150 ha i 250 ha. Rolnik może zasadzić cztery zboża: pszenicę, jęczmień, żyto, owies. Średnią wielkość zbiorów w [ q/ha ] z danego pola, cenę 1 q zboża oraz minimalną wielkość produkcji podano w tabeli. Określić optymalną strukturę zasiewów zapewniający maksymalny zysk rolnika.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| POLE  ZBOŻE | 100 ha | 150 ha | 250 ha | Cena  1 q w j.p. | minimalny  zbiór w [ q ] |
| Pszenica | 2 | 1.5 | 1 | 10 | 120 |
| Żyto | 2.5 | 2 | 1.5 | 20 | 150 |
| Jęczmień | 1.2 | 1 | 0.7 | 15 | 100 |
| Owies | 1.1 | 1.3 | 0.9 | 13 | 120 |

Zadanie 2.1.66. Rolnik posiada gospodarstwo rolne składające się z 45 ha o różnych klasach 15 ha w I klasie, 10 ha w II klasie i 20 ha w III klasie. Ponadto posiada 100 krów i 200 sztuk trzody chlewnej, które utrzymuje z własnej produkcji rolnej. Zapotrzebowania na składniki odżywcze potrzebne do prawidłowego żywienia stad przez rok podaje Tabela 1. W Tabeli 2 podano zawartości poszczególnych składników w płodach rolnych. Tabela 3 podaje wydajności z hektara poszczególnych płodów w zależności od klasy ziemi na jakiej zostały posiane oraz cenę ich zbytu.

Tabela 1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Wielkości składników potrzebne na utrzymanie wszystkich zwierząt [js]. | | |
|  | Składnik 1 | Składnik 2 | Składnik 3 |
| Krowy | 1200 | 5400 | 4500 |
| Trzoda | 1500 | 6800 | 5200 |

Tabela 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Zawartość [js] składnika w 1 q płodu | | |
| Rodzaj płodu | Składnik 1 | Składnik 2 | Składnik 3 |
| A | 55 | 45 | 75 |
| B | 61 | 15 | 45 |

Tabela 3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | Wydajność w q z ha | | |
|  | Cena | Klasa I | Klasa II | Klasa III |
| A | 1,00 | 250 | 180 | 150 |
| B | 2,50 | 315 | 280 | 200 |

Określić strukturę zasiewów dającą rolnikowi maksymalny zysk, przy zapewnieniu utrzymania stada, bez dodatkowych zakupów.

Zadanie 2.1.67. W zakładzie produkowane są elementy do trzech typów samochodów Opel, Fiat, Ford. Parametry produkcji potrzebne do sformułowania modelu matematycznego znajdują się w tabelach 1,2. Zakładamy, że wadliwość nie zależy od rodzaju produkowanego elementu, ale od ilości elementów wyprodukowanych na maszynie. Koszt jednostkowy, podobnie jak wadliwość nie zależy od rodzaju produkowanego elementu.

Tabela 1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Cena | Minimalna produkcja | Zużycie surowca potrzebne do wyprodukowania jednego elementu | | |
|  | Surowiec 1 | Surowiec 2 | Surowiec 3 |
| Opel | 55 | 15 | 12 | 15 | 12 |
| Fiat | 80 | 40 | 14 | 15 | 21 |
| Ford | 50 | 35 | 16 | 12 | 12 |
| Zapas surowca |  | | 2500 | 3000 | 3000 |

Tabela 2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Zdolności produkcyjne maszyn, stosowanych zamiennie do produkcji elementów. | |
|  | Maszyna 1 | Maszyna 2 |
| Opel | 100 | 90 |
| Fiat | 120 | 85 |
| Ford | 90 | 75 |
| Koszt jednostkowy | 10 | 9 |
| Wadliwość produkcji | 0,1 | 0,5 |

Jak należy ustalić produkcję, aby wyprodukować jak najwięcej elementów?

Zadanie 2.1.68. Jak zmieni się produkcja jeżeli chcemy osiągnąć największy zysk w zadaniu 2.1.82?

Zadanie 2.1.69. Przedsiębiorstwo rozpisało przetarg na produkcję 3 podzespołów. Należy dokonać wyboru pomiędzy pięcioma ofertami złożonymi przez różne przedsiębiorstwa. Dane dotyczące ofert przedstawia tabela 1. Warunki przetargu są następujące:

* Jedno przedsiębiorstwo może produkować co najwyżej 2 podzespoły.
* Średni poziom ryzyka całej inwestycji nie powinien być większy niż 125 pkt.
* Średnia wartość współczynnika zaufania do firmy nie powinna być mniejsza niż 22 pkt.

Tabela 1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | Ilość podzespołów w pakiecie | Cena pakietu | Ryzyko  Pkt. | Zaufanie  Pkt. |
| L&L | Podzespół 1 | 10 | 10 | 125 | 25 |
| Podzespół 2 | 15 | 15 | 130 | 21 |
| Podzespół 3 | 12 | 24 | 140 | 19 |
| L&X | Podzespół 1 | 15 | 15 | 99 | 21 |
| Podzespół 2 | 16 | 15 | 150 | 19 |
| Podzespół 3 | 18 | 20 | 135 | 30 |
| X&L | Podzespół 1 | 15 | 22 | 145 | 19 |
| Podzespół 2 | 17 | 12 | 105 | 32 |
| Podzespół 3 | 15 | 15 | 115 | 15 |
| X&X | Podzespół 1 | 16 | 16 | 100 | 26 |
| Podzespół 2 | 14 | 14 | 105 | 28 |
| Podzespół 3 | 15 | 15 | 90 | 24 |

Tabela 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Podzespół 1 | Podzespół 2 | Podzespół 3 |
| Wielkość przetargu | 150 | 250 | 200 |

Jak należy wybrać oferty, jeżeli kryterium mają być najmniejsze koszy łączne ponoszone przez przedsiębiorstwo w związku z zleceniami?

Literatura

[1] Grabowski W. Programowanie matematyczne, PWE, Warszawa 1980.

[2] Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A., Metody obliczeniowe optymalizacji, PWN,

Warszawa 1977.

[3] Radzikowski W., Badania operacyjne w zarządzaniu przedsiębiorstwem, Toruńska Szkoła

Zarządzania, Toruń 1997.

[4] Kryński H., Badach A., Zastosowanie matematyki do podejmowania decyzji ekonomicznych,

PWN, Warszawa 1976.

[5] Badania Operacyjne, Praca zbiorowa pod redakcją Edmunda Ignasiaka, PWE, Warszawa 1997.

[6] Jędrzejczyk Z., Skrzypek J., Kukuła K., Walkosz A., Badania operacyjne w przykładach i

zadaniach, PWN. Warszawa 1993.

[7] Czerwiński Z., Matematyka na usługach ekonomii, PWN, Warszawa 1983.

[8] Gass S.I., Programowanie liniowe. Metody i zastosowania, PWN, Warszawa 1963.

[9] Kalichmann J.L., zadania z algebry liniowej i programowania liniowego, PWN, Warszawa 1974.

[10] Moore P.G., Wprowadzenie do badań operacyjnych, WNT, Warszawa 1973.

[11] Wagner H.M., Badania operacyjne, PWE, Warszawa 1980.

[12] van der Veen, Wstęp do badań operacyjnych, PWN, 1970.

[13] Programowanie matematyczne – zbiór zadań, pod redakcją naukowa Stanisława Krawczyka,

PWE, Warszawa 1978.

[14] Mitchell G.H., Badania operacyjne- metody i przykłady, WNT, Warszawa 1980.